# Riemann 曲面及其上的位势理论

邱曙熙 著



厦门大学出版社

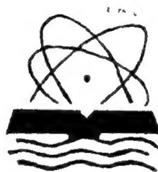
责任编辑：宋文艳
封面设计：文　心




ISBN 7-5615-1384-4 / O · 84
定价：13.00元

# Riemann 曲面
# 及其上的位势理论

邱曙熙 著



本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版

厦门大学出版社

**Riemann 曲面及其上的位势理论**
邱曙熙　著
*
厦门大学出版社出版发行
（地址：厦门大学　邮编：361005）
莆田市印刷厂印刷
（地址：莆田广化寺路口　邮编：351100）
*
开本　850×1168　1/32　10.875 印张　2 插页　272 千字
1998 年 8 月第 1 版　　1998 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—1000 册
ISBN 7-5615-1384-4/O·84
定价：13.00 元
本书如有印装质量问题请直接寄印刷厂调换

# 序　言

数学本身被看作自然科学的基础，具有逻辑的严密性及应用的广泛性。应用的广泛性建立在高度综合性上。

本书有两大特点，一为高度综合，二为细致分析。高度综合表现在将经典数学欧几里德几何、数学分析和代数演算与近代数学出现的拓扑学、函数论及群、环、体的理论综合为一体，用流形的概念将古典复平面与拓扑空间相连接，将古典的函数值分布理论化为 Riemann 曲面的覆盖面理论，用 Fuchs 群研究变换中的不变性，等等。为此，本书使读者能接触较为广泛的数学领域，开拓思维，在短时期内掌握 Riemann 曲面和位势理论的有关基础知识。本书的另一个特点细致分析则体现在将 Riemann 曲面、调和函数、位势理论作了深入的探索，对 Riemann 曲面的分类、曲面函数族的分类作了细致分析，并用一些例子如 Cantor 集对曲面上的集合用古典的概念建立新的集合理论的形象。

值得指出的是，作者邱曙熙注意到该书逻辑的严谨性和结构的合理性，其治学的态度是严肃认真的。

本书为数学专业研究学者提供了一本用少量文字提供大量信息的专业书籍。

我在通读过此书后，提出上面的意见，供学者参考。

李文清

一九九七年八月三十日

# 前　言

目前，我国研究有关 Riemann 曲面理论和位势理论的队伍相对其它数学的分支显得比较单薄，书籍也相对偏少。作者编写此书旨在为数学大厦添砖加瓦，向读者介绍 Riemann 曲面、位势理论的基础知识，借以增进读者对此专业分支的兴趣。

全书分为五个部分。第一部分（第一、二章）是拓扑空间等预备知识和曲面拓扑基础知识。第二部分（第三章）引入 Riemann 曲面的概念，讨论（半）调和函数、Green 函数的性质。第三部分（第四章）是（二维）位势理论的基础知识。第四部分（第五章）研究 Riemann 曲面上各种半纯、解析函数的存在性及其性质；给出单值化定理和 Riemann-Roch 定理的证明。第五部分（第六、七章）讨论极大 Riemann 曲面的性质、非极大 Riemann 曲面的延拓问题和开 Riemann 曲面的分类理论。这一部分含有作者一些新近的结果。

本书的构思直接受益于作者的恩师、已故的张鸣镛教授。特别是书中写入的作者 80 年代的成果是在张鸣镛教授的关心指导下完成的。

本书得以与读者见面与厦门大学老一辈教授的深切关怀和支持是分不开的。尤其令作者深受感动的是李文清教授以八旬高龄在去年盛暑季节通读了本书稿，提出许多宝贵的意见，并为本书撰写序言。作者在此向他们表示衷心的感谢。

邱曙熙

一九九八年五月四日

# 常用符号

$A^C$　集 A 的余集

$A\backslash B$　集 $A$ 关于集 $B$ 的差集，即 $A\backslash B=\{x|x\in A, x\overline{\in} B\}$

$C(E)$　集 $E$ 上连续函数全体所成之集

$\partial D$　集 $D$ 的边界

$\overline{D}$、$\mathrm{Cl}(D)$　集 $D$ 的闭包，即 $\overline{D}=D\cup\partial D$

$G\ni z\to a$　$z\in G$ 且 $z\to a$

$\mathrm{Ext}(E)$　集 $E$ 的外部

$\mathrm{Int}(E)$、$E^0$　集 $E$ 的内部

$\mathbf{Im}\, z$　复数 $z$ 的虚部

$\mathrm{mes}(A)$、$\mathrm{m}(A)$　集 $A$ 的 Lebesgue 测度

$\mathbf{N}$　自然数全体所成之集

$O(a,\rho)$　复平面上以 $a$ 为心以 $\rho>0$ 为半径的开圆盘

$\mathbf{Re}\, z$　复数 $z$ 的实部

$\mathbf{Z}$　整数全体所成之集

$\gamma(A)$　集 $A$ 的(内)容量

$:=$　表示“定义”，例如“$P:=Q$”表示：$P$ 定义为 $Q$，或 $P$ 记为 $Q$；或 $Q$ 定义为 $P$，或 $Q$ 记为 $P$

V.3.4　表示“第五章§3的第4段(落)”

§1.2.3　表示“§1的第2.3段(落)”

▌　表示“证毕”

# 目　录

# 第一章

# 预备知识

## §1　拓扑空间

极限运算是分析学的重要工具，为此必须引入具在拓扑结构的集合. 某些对象组成一个集合通常称为空间，集合里的每个元素称为空间中的点. 将集合 $A$ 关于集合 $B$ 的差集表示为 $A\backslash B$；而空间 $X$ 的子集 $A$ 的余集(即 $X\backslash A$)记为 ${}_XA$ 或 $A^c$.

### 1.　开集和闭集

设 $\tau$ 是集合 $X$ 有一个子集族，若 $\tau$ 满足条件

(1) $\varnothing\in\tau$, $X\in\tau$；和

(2) 对有限交和任意并两种运算是封闭的，

则称 $(X,\tau)$ 为<u>拓扑空间</u>，有时也称 $X$ 为拓扑空间；$\tau$ 称为 $X$ 的拓扑，$\tau$ 中的集称为 $X$ 的<u>开集</u>.

若 $\tau$ 仅由 $X$ 和 $\varnothing$ 组成，则 $(X,\tau)$ 是一拓扑空间，$\tau$ 称为<u>凝固拓扑</u>.

若 $\tau$ 为 $X$ 中全体子集组成之族，则 $(X,\tau)$ 是一拓扑空间，$\tau$ 称为<u>离散拓扑</u>.

若 $X$ 有两个拓扑 $\tau_1$ 和 $\tau_2$，且 $\tau_1\subset\tau_2$，则说 $\tau_2$ 比 $\tau_1$ <u>强</u>，或说 $\tau_1$ 比 $\tau_2$ <u>弱</u>.

开集的余集称为<u>闭集</u>.

任意个闭集的交集是闭集，有限个闭集的并集是闭集.

### 2. 闭包和边界

设 $(X,\tau)$ 是一拓扑空间. 对 $X$ 的子集 $A$，若存在 $X$ 的子集 $U$ 和 $V\in\tau$ 使得 $A\subset V\subset U$. 则称 $U$ 为集合 $A$ 的<u>邻域</u>. 特别 $A$ 退缩为一点 $x$ 时，称 $U$ 为点 $x$ 的<u>邻域</u>.

考虑空间 $X$ 的子集 $E$. 包含集合 $E$ 的最小闭集称为 $E$ 的<u>闭包</u>，记作 $\mathrm{Cl}(E)$ 或 $\overline{E}$. 包含于 $E$ 内的最大开集称为 $E$ 的<u>内部</u>，记作 $\mathrm{Int}(E)$ 或 $E^{\circ}$. 闭包 $\overline{E}$ 关于 $X$ 的余集称为 $E$ 的<u>外部</u>，记作 $\mathrm{Ext}(E)$. 又，$E^{\circ}$ 关于 $\overline{E}$ 的差集 $\overline{E}\backslash E^{\circ}$ 称为 $E$ 的<u>边界</u>，记作 $\partial E$ 或 $\mathrm{B}(E)$.

$E$ 的内部的任一点称为 $E$ 的内点；外部的任一点称为外点；边界上的任一点称为边界点. 且显然有

(i) $\overline{\varnothing}=\varnothing$ ;

(ii) $A\subset\overline{A}$ ;

(iii) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ ;

(iv) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ;

(v) $(E^{c})^{\circ}=\mathrm{Ext}(E)$ ;

(vi) $\overline{E}=\bigcap\{F\mid F^{c}\in\tau,\ E\subset F\subset X\}$;

(vii) $E^{\circ}=\bigcup\{G\mid G\subset E,\ G\in\tau\}$.

### 3. 诱导拓扑

若 $Y$ 为 $X$ 的一子集，集族 $\tau|_{Y}:=\{Y\cap G\mid G\in\tau\}$ 形成 $Y$ 的一个拓扑，即 $(Y,\tau|_{Y})$ 成一个拓扑空间，称为空间 $(X,\tau)$ 的<u>拓扑子空间</u>. $Y$ 中的拓扑结构称为<u>相对拓扑</u>或<u>诱导拓扑</u>.

### 4. 拓扑基

设 $\beta$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ 的一个开集族，且 $\bigcup\beta=X$. 若对任

意 $x\in X$，对任意包含 $x$ 的开集 $U$，存在 $B\in\beta$ 使得 $x\in B\subset U$，则称 $\beta$ 为 $X$ 的一个基.

设 $A$ 是 $X$ 的一个子集族，若集族

$$\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in A(i=1,\cdots,n);n \text{ 为自然数}\}$$

是 $X$ 的一个基，则称 $A$ 是 $X$ 的一个子基. 包含子基的最小拓扑称为该子基所生成的拓扑.

设 $x$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ 的点. 若存在 $x$ 的一邻域族 $\sigma$，使得对 $x$ 的任一邻域 $U$，都有 $V\in\sigma$ 满足 $V\subset U$，则称 $\sigma$ 为 $x$ 的邻域基.

### 5. 可数空间

若拓扑空间 $X$ 具有一可数基，则称 $X$ 为可数空间. 若每一点 $x\in X$ 都有一个可数的邻域基，则称 $X$ 为局部可数空间.

### 6. 连通空间

若拓扑空间 $X$ 不能表为两个不交非空开集之并，则称 $X$ 为连通的.

拓扑空间 $X$ 是连通的充分且必要条件是 $X$ 不能表示为两个不交非空闭集之并.

有公共点的连通集之并仍为连通的.

若集 $A$ 连通，集 $B$ 满足条件 $A\subset B\subset \bar{A}$，则 $B$ 必连通.

连通的开集称为区域. 不止一点的连通闭集称为(非退化的)连续统.

### 7. 全不连通点集

若 $X$ 有一个由连通集组成的基，则 $X$ 称为局部连通的.

拓扑空间 $X$ 的最大连通子集称为 $X$ 的连通分支，简称分支. 拓扑空间的分支都是闭集. 任意两个不同的分支没有公共点. 特

别，局部连通空间的分支即开又闭.

设 $T$ 是拓扑空间 $X$ 的子集，若 $T$ 是 $X$ 中的一族即开又闭的子集之交，而且 $T$ 的任一真子集都不是即开又闭的，则称 $T$ 是 $X$ 的一个伪分支.

拓扑空间 $X$ 的伪分支都是闭集. 任意两个不同的伪分支没有公共点. 对任一点 $x\in X$，必存在包含 $x$ 的分支和伪分支，而且，若分别记之为 $S$ 和 $T$，则 $x\in S\subset T$.

设 $S$ 是拓扑空间 $X$ 的不止一点的子集，若 $S$ 的每个伪分支都只包含一点，则称 $S$ 是全不连通的（或 Sierpinski 式全不连通的）. 若 $S$ 的每个分支都只包含一点，则称 $S$ 是遗传全不连通的(或Hausdorff 式全不连通的). 若 $S$ 的任何一个紧致的连通子集都只包含一点，则称 $S$ 是点状的(或不连续的).

显然全不连通点集一定是遗传全不连通的；遗传全不连通点集一定是点状的. 但其逆不真.

#### 8.　紧致空间

设 $E$ 是拓扑空间 $(X,\tau)$ 的一个子集，若有一开集族 $K\subset\tau$ 使 $E\subset\bigcup K$，则称 $K$ 是 $E$ 的一个开覆盖.

若 $X$ 是可数的，$K$ 是 $E$ 的一个开覆盖，则存在一个可数子覆盖，即有 $K$ 中子列 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$.

若集 $E$ 的每个开覆盖必有有限子覆盖，则称 $E$ 是紧致的.

设 $A$ 是 $X$ 的一个子集族，若 $A$ 中任何有限子集具有非空交集，则称 $A$ 具有有限相交性质. $X$ 为紧致的充分必要条件是 $X$ 中每个具有有限相交性质的闭集族有一非空交集.

#### 9.　局部紧致空间

若拓扑空间 $X$ 有一闭包为紧致的集族组成的基，则称 $X$ 为

局部紧致空间.

设 $E \subset X$，若存在一紧致集 $C \subset X$ 使 $E \subset C$，则称 $E$ 为有界集. 有界集的闭子集也是紧致的.

### 10. Hausdorff 空间

若拓扑空间 $X$ 中任意两点都有不交的邻域，则称 $X$ 为 Hausdorff 空间.

在 Hausdorff 空间中，任意两个不交的紧致集有不交的邻域；紧致子集是闭的. 从而，在紧致 Hausdorff 空间中，子集 $E$ 是紧致的当且仅当 $E$ 是闭的.

### 11. Baire 范畴集

设 $A$、$B$ 是拓扑空间 $X$ 的两个子集，若 $A$ 的每一点 $x$ 的任一邻域皆有 $B$ 中之点，则称 $B$ 在 $A$ 中稠密. 若集 $B$ 在全空间 $X$ 中稠密时，简称 $B$ 为稠密集.

设 $A$ 是拓扑空间 $X$ 的子集，若 $A$ 的闭包 $\overline{A}$ 的余集为 $X$ 的稠密集，则称 $A$ 为疏朗集. 若集 $A$ 可表示成有限个或可列个 $X$ 的疏朗集之并，则称 $A$ 为第一类集或说 $A$ 在 $X$ 中是第一范畴的. 非第一类集称为第二类集或说在 $X$ 中是第二范畴的.

### 12. 商空间

设 $P$ 是拓扑空间 $X$ 的一个不交子集族，且有 $X=\bigcup P$. 考虑一新空间 $S$，它的点就是 $P$ 中之集，即对于任意 $p\in P$，将 $p$ 中之点粘合（也就是将属于 $p$ 的所有点看作是恒同的）. 空间 $S$ 中的集 $O$ 是开集当且仅当对应的集之并 $\bigcup_{p\in O} p$ 在 $X$ 中是开集. 易验证，$S$ 满足拓扑空间的条件. 粘合后所得的拓扑空间称为 $X$ 在集 $p\in P$ 作为等价类的等价关系下的商空间.

### 13. Alexandroff 紧致化

设 $(X,\tau)$ 为局部紧致但非紧致的拓扑空间. 在空间外增加一点 $x^*$ 得一空间 $X^*:=X\bigcup\{x^*\}$. 若将 $X$ 中的紧致集关于 $X^*$ 的余集定义为 $x^*$ 的开邻域, 这些邻域和 $\tau$ 中之集组成开集族 (即拓扑) $\tau^*$, 则 $(X^*,\tau^*)$ 成一紧致拓扑空间, 称其为 $X$ 的Alexandroff单点紧致化, 也说 $X$ 由点 $x^*$ 紧致化成 $X^*$. 在曲面论中, $x^*$ 称为 $X$ 的理想边界.

### 14. 和空间

设有拓扑空间族 $\{(X_i,\tau_i)\,|\,i\in I\}$, 对其并 $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ 构造拓扑如下: $X$ 中的子集 $U$ 是开集当且仅当对任意 $i\in I$, $U\bigcap X_i\in\tau_i$. $X$ 在这拓扑下成一拓扑空间, 称为和空间.

可在和空间中构造商空间,这意味着不同空间的点可被粘合.

### 15. 乘积空间

设集族 $\mathscr{A}:=\{(A_i,\tau_i)\,|\,i\in I\}$,其中 $I$ 是集,称为指标集. 集合

$$\mathop{\times}_{i\in I} X_i := \{f\,|\,f\text{ 为定义在 } I \text{ 上的映照},f(i)\in X_i,i\in I\}$$

(映照的定义参看下节)称为集族的 $\mathscr{A}$ 的笛卡尔积. 当 $I$ 是有限集或无限可数集时,笛卡尔积常记作

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n \text{ 或 } A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\times\cdots.$$

特别,若 $A_1$、$A_2$、…、$A_n$ 都相同时可将其统记为 $A$,而其笛卡尔积则记作 $A^n$.

设有拓扑空间族 $\{(X_i,\tau_i)\,|\,i\in I\}$, 在其笛卡尔积

$$\mathop{\times}_{i\in I} X_i := \{f\,|\,f\text{ 为定义在 } I \text{ 上的映照},f(i)\in X_i,i\in I\}$$

构造拓扑如下: 取集族

$$\mathcal{A}=\{V_j\times(\mathop{\times}_{i\in\Lambda\setminus\{j\}}X_i)\mid V_j\in\tau_j,j\in I\}$$

作为拓扑子基，其生成的拓扑 $\tau$ 称为乘积拓扑. 显然 $(\mathop{\times}_{i\in I}X_i,\tau)$ 成一拓扑空间，称为乘积拓扑空间.

记 $R^1$ 为实数空间，$R^n:=\mathop{\times}_{i=1}^{n}R_i^1$，其中每个 $R_i^1$ 都表示 $R^1$，则 $R^n$ 是局部紧致的可数 Hausdorff 空间，称为 $n$-维欧几里得空间.

$R^n$ 中的集族

$$\{R_1^1\times\cdots\times R_{j-1}^1\times(a_j,b_j)\times R_{j+1}^1\times\cdots\times R_n^1\mid a_j,b_j\in R^1,\ j=1,\cdots,n;a_j=b_j\text{ 时理解为空集}\}$$

是 $R^n$ 的一个子基，而集族

$$\{(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)\mid-\infty<a_j\leqslant b_j<+\infty,\ j=1,\cdots,n;\text{ 某个 }(a_j,b_j)=\varnothing\text{ 时理解为空集}\}$$

是 $R^n$ 的一个基.

## 16. 距离空间

设 $X$ 是一集合，若对于 $X$ 中的每一对元素 $x$、$y$ 都已指定一实数 $\rho(x,y)$与之对应且满足：(i) $\rho(x,y)\geqslant0$，且 $x=y$ 当且仅当 $\rho(x,y)=0$；(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ $(\forall z\in X)$，则$(X,\rho)$称为距离空间. 也简称 $X$ 为距离空间.

设 $x$ 是距离空间 $X$ 的一点，则点集

$$S(x,r)=\{y\mid\rho(x,y)<r,y\in X,r>0\}$$

称为 $x$ 的以 $r$ 为半径的球邻域.

若距离空间 $X$ 中的基本列(又称 Cauchy 列)皆收敛，则称 $X$ 为完备的.

设 $A$ 是距离空间 $X$ 的一个子集. 若 $A$ 中每一点 $x$ 皆有球邻域 $S(x,r)\subset A$，则称 $A$ 是 $X$ 的一个开集. $X$ 的全体开集组成 $X$ 的一个拓扑，使其成为拓扑空间.

非空完备距离空间必为第二类集.

## §2　连续映照

### 1.　映照

设 $A$、$B$ 是两个集，若 $A$ 和 $B$ 之间有一对应关系 $f$，使得对于任一点 $a\in A$，必有点 $b\in B$ 与之对应，则称 $f$ 是定义在 $A$ 上的映照，记作 $f: A\to B$，或 $f: a\mapsto b$，或 $b=f(a)$. 通常说映照 $f$ 把 $A$ 映入 $B$. 若 $f(A)=B$，则说 $f$ 把 $A$ 映上 $B$.

对 $A$ 的子集 $V$，将 $B$ 的子集 $\{b\,|\,b=f(a),a\in V\}$ 称为 $V$ 关于 $f$ 的象，记为 $f(V)$；对 $B$ 的子集 $U$，将 $A$ 子集 $\{a\,|\,f(a)\in U,a\in A\}$ 称为 $U$ 关于 $f$ 的原象，记为 $f^{-1}(U)$. 若 $V$ 和 $U$ 分别为单点集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 时，则分别简记为 $f(x)=f(\{x\})$ 和 $f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$.

若 $B$ 为实或复数集，则映照 $f: A\to B$ 也称为定义在 $A$ 上的函数.

在映照 $f$ 下，若 $A$ 的每一点 $a$ 所确定的象 $f(a)\in B$ 是唯一的，则称 $f$ 是单值的，否则是多值的. 若逆映照 $f^{-1}$ 为单值的，称 $f$ 为单价的. 单值又单价的映照称为一对一的.

### 2.　连续映照

设 $f: A\to B$ 是两拓扑空间之间的映照. 若 $Y$ 中任意开集 $U$ 的原象 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的开集，则称 $f$ 是连续的. 若 $f$ 把 $X$ 的任一开集都映成 $Y$ 中的开集，则称 $f$ 为开映照.

设 $S$ 是 $Y$ 的拓扑子基，则映照 $f$ 为连续的当且仅当对任意 $U\in S$，逆象 $f^{-1}(U)$ 是 $X$ 中的开集.

设 $X$ 是连通空间. $f$ 是定义在 $X$ 上的非常数实值连续函数，

则 $f$ 必即取到有理数，也取到无理数.

### 3. 拓扑映照

设 $f: A\to B$ 是一对一的连续映照，若其逆映照也是连续的，则称 $f$ 是一个同胚(映照)或拓扑映照. 此时 $A$ 和 $B$ 称为同胚的或拓扑等价的.

连通集在连续映照下的象仍是连通的. 紧致集在连续映照下的象仍是紧致的. 将紧致 Hausdorff 空间一对一映上另一个紧致 Hausdorff 空间的连续映照必定是个同胚.

在同胚映照下保持不变的性质称为拓扑性质. 连通性和紧致性都是拓扑性质.

### 4. 一维空间上的非连续开映照的例子

下面的例子说明开映照未必是连续的.

对固定的整数 $n$,对任一自然数 $m$,记

$$P_{n,0}=\left(n+\frac{1}{3},\quad n+\frac{2}{3}\right),$$

$$P_{n,m}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}=\left(n+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{3^k}+\frac{1}{3^{m+1}},\quad n+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{3^k}+\frac{2}{3^{m+1}}\right).$$

不难看出从每个长度为 1 的闭区间 $[n,\ n+1]$ 内移去开区间族

$$\{P_{n,m}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}\mid m=0,1,\cdots;\alpha_k\in\{0,2\},k=1,2,\cdots,m\}$$

的全体区间后所得的余集 $E_n$ 正是著名的对应于闭区间 $[n,\ n+1]$ 的Cantor 疏朗完备集. 现定义映照 $f: R^1\to\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 如下：

$$f(x)=\begin{cases}3^{m+1}\left(x-n-\dfrac{1}{2\cdot 3^m}-\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\dfrac{\alpha_k}{3^k}\right), & \text{当 } x\in P_{n,m}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)},\\ \qquad\text{其中 } n=0,\pm 1,\cdots;m=0,1,\cdots; & \\ \qquad\alpha_k\in\{0,2\},k=1,\cdots,m; & \\ 0, & \text{当 } x\in E_n,\text{其中 } n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.\end{cases}$$

容易验证，$f$ 将每个开区间 $P^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}$ 映成区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 且对于 $P^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}$ 中任一趋于其左端点(对应地，右端点)的点列 $\{x_i\}$，极限 $\lim\limits_{i\to\infty}f(x_i)$ 存在且等于 $-\frac{1}{2}$ (对应地，$\frac{1}{2}$). 但这种区间的端点必属于某个 Cantor 集 $E_n$，其象必为 0. 故映照 $f$ 非连续.

下面证明每个开集在映照 $f$ 下的象都是开区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上的开集. 为此设 $G$ 是 $R^1$ 上的开区间. 若有某个区间 $P^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}$ 包含 $G$，则显然其象是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 内的一个开区间；若任何区间 $P_{n,m}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}$ 都不包含 $G$，则 $G$ 必包含某个这类区间的端点. 然而该端点定属于某个 Cantor 集. 又由于该集的疏朗性，$G$ 必包含某个这类区间 $P_{n,m}^{(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}$，从而其象是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 综上所述，映照 $f$ 为开映照.

**注**　上面所构造的函数 $f$ 是有界的. 如果不要求有界性，可以构造函数 $g$：$R^1\to R^1$ 如下：$g$ 将 $R^1\setminus\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}E_n$ 中的每一个构成区间拓扑映上 $R^1$，而将 $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}E_n$ 中的每一点都映成原点. 则 $g$ 是非连续的开映照.

# §3　弧 曲线

### 1.　弧

闭线段 $[0,1]$ 在拓扑空间 $X$ 上的连续象称为弧或曲线段. 弧 $\gamma$ 可用映照 $\gamma$: $p=f(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$ 表示，其中 $f$: $[0,1]\to X$ 为连续映照. $f(0)$ 称为弧 $\gamma$ 的起点，而 $f(1)$ 称为终点.

开线段 $(0,1)$ 在拓扑空间 $X$ 上的连续象称为开弧；而闭线段 $[0,1]$在拓扑空间上的同胚象称为Jordan 弧.

### 2.　Jordan 曲线

圆周在拓扑空间上的连续象称为闭曲线. 它的同胚象称为 Jordan 曲线.

有时也说闭曲线是起点和终点重合的弧.

### 3.　弧连通空间

若拓扑空间上任意两点可由其上的弧连接（即此弧分别以这两点为起点和终点），则称此空间为弧连通的. 若空间有一由弧连通集组成的基，则称为局部弧连通的.

局部弧连通空间 $X$ 是弧连通的当且仅当 $X$ 是连通的.

$R^n$ 是局部弧连通的.

# 第二章

# 曲面拓扑

## §1　曲面的基本群

### 1.　流形的基本概念

**定义 1**　若 Hausdorff 空间 $S$ 存在着由同胚于 $R^n$ 的开集所组成的开覆盖，则称 $S$ 为 <u>$n$-维流形</u>.

流形是局部弧连通的，且每个分支是弧连通的. 但流形却未必是可数的.

连通且紧致的 1-维流形与圆周同胚. 可数 1-维流形的非紧致分支与开线段拓扑等价.

**定义 2**　连通的 2-维流形称为<u>曲面</u>. 紧致的曲面称为<u>闭曲面</u>. 非紧致的曲面称为<u>开曲面</u>.

曲面 $S$ 上的闭包与闭圆盘同胚的开集 $G$ 称为 $S$ 的 <u>Jordan 区域</u>，在这同胚映照下 $G$ 必须对应开圆盘.

**定义 3**　曲面 $S$ 上的每一点 $p$ 总有 Jordan(区域的)开邻域. 称此区域为 $p$ 的<u>参数邻域</u>；其对应的平面开圆盘称为<u>参数圆</u>；其对应的同胚映照称为<u>参数映照</u>.

每个参数映照总可以延拓成更大同心圆盘的同胚映照.

### 2. 同伦弧

**定义 4**　设拓扑空间 $S$ 上两段弧 $\gamma_1$: $p=f_1(t)$ 和 $\gamma_2$: $p=f_2(t)$ 有相同的起点 $p_1$ 和终点 $p_2$. 如果存在将闭方形

$$\{(t,u) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant u \leqslant 1\}$$

映入 $S$ 的单值连续映照 $f$ 使满足条件：

1) $f(t,0)=f_1(t)$, $f(t,1)=f_2(t)$, $\forall\, t \in [0,1]$；和

2) $f(0,u)=p_1$, $f(1,u)=p_2$, $\forall\, u \in [0,1]$,

那么称 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是<u>同伦的</u>，记作 $\gamma_1 \approx \gamma_2$. 映照 $f$ 称为<u>形变</u>. 为方便，也称 $\gamma_1$ 在形变 $f$ 下变上 $\gamma_2$.

同伦关系是自反、对称和可逆的.

**定义 5**　设拓扑空间 $S$ 上两段弧 $\gamma_1$: $p=f_1(t)$ 和 $\gamma_2$: $p=f_2(t)$ 使得 $f_1(1)=f_2(0)$，则弧

$$\gamma_1\gamma_2:\ p=f(t)=\begin{cases} f_1(2t), & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ f_2(2t-1), & \text{当 } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

称为 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 的<u>乘积</u>. 而弧

$$p=f_1(1-t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

称为 $\gamma_1$ 的<u>逆弧</u>，记为 $\gamma_1^{-1}$.

若 $\alpha \approx \alpha'$、$\beta \approx \beta'$，则 $\alpha\beta \approx \alpha'\beta'$，且 $\alpha^{-1} \approx \alpha'^{-1}$. 由此可见同伦弧的乘积和逆同样是有意义的.

现在考虑连续实值的非减函数 $x=\tau(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$，其中 $\tau(0)=0$, $\tau(1)=1$. 可得一弧 $p=f(\tau(t))$，它是由 $p=f(t)$ 经复合参数化而得. 借助于形变 $\psi(t,u):=f[(1-u)t+u\tau(t)]$ 可知经<u>参数复合化</u>所得的弧同伦于原弧.

### 3. 基本群

考虑拓扑空间 $S$ 上同一起点 $O$ 的闭曲线族，将同伦曲线看

作是同一个元素，由此所得的空间记为 $\mathscr{F}_O(S)$. 为方便，同伦于 $\alpha$ 的曲线类仍记为 $\alpha$. 同伦类的乘法是可组合的，尽管 $(\alpha\beta)\gamma$ 和 $\alpha(\beta\gamma)$ 不是恒同闭曲线，但却可参数复合化. 与点 $O$ 同伦的闭曲线类是 $\mathscr{F}_O(S)$ 的单位元素，记作 1. 显然 $\alpha 1 = 1\alpha$. 通过形变

$$\psi(t,u) = \begin{cases} f(2t), & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant (1-u)/2; \\ f(1-u), & \text{当 } (1-u)/2 \leqslant t \leqslant (1+u)/2; \\ f(2-2t), & \text{当 } (1+u)/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

可知 $\alpha\alpha^{-1}=1$. 于是 $\mathscr{F}_O(S)$ 是群，称为 $S$ 关于原点 $O$ 的基本群.

若 $S$ 是弧连通的，则对 $S$ 上的任意两点 $O$、$O'$ 可用弧 $\sigma$ 将 $O$ 与 $O'$ 连接起来. 对任意 $\alpha \in \mathscr{F}_O(S)$，$\alpha' = \sigma\alpha\sigma^{-1} \in \mathscr{F}_{O'}(S)$. 映照 $\varphi$：$\alpha \to \sigma\alpha\sigma^{-1}$ 是保积且一对一的，同时为映上的. 故映照 $\varphi$ 是将 $\mathscr{F}_O(S)$ 映上 $\mathscr{F}_{O'}(S)$ 的同态映照.

**定义 6**　同构于全体群 $\mathscr{F}_O(S)$ 的抽象群称为 $S$ 的基本群或 Poincaré 群.

**定理 1**　弧连通空间的基本群是拓扑不变的.

**证**　设 $\varphi$ 是将空间 $S$ 映入另一空间 $S'$ 的连续映照. 对于每个 $S$ 上的弧 $\gamma$：$p=f(t)$，在 $S'$ 上就有由映照 $\varphi \circ f$ 所决定的与之对应的弧 $\gamma'$. 由于同伦的弧被映成同伦的弧，因此这一对应可以看作是把 $\mathscr{F}_O(S)$ 映入 $\mathscr{F}_{O'}(S)$ 的映照，其中 $O'=\varphi(O)$. 映照 $\varphi$ 又是保积的，从而是个同态. 若 $\varphi$ 是拓扑映照且为映上 $S'$ 的，则显然是映上 $\mathscr{F}_{O'}(S)$ 的同构. ▌

### 4.　单连通

**定义 7**　基本群只有一个元素的空间称为单连通空间.

**定理 2**　空间 $R^n$ 是单连通的.

**证**　设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $kx=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$. 那么，以原点 $O$ 为起点和终点的闭曲线 $\sigma$：$x=f(t)$、$f(0)=f(1)=O$，在形

变 $\psi(t,u)=(1-u)f(t)$ 下必变上曲线 $1: f_0(t)=0$. ▌

**推论 1**　平面、闭圆盘、开圆盘及星形子域等都是单连通的.

**5.　曲线的指数**

在复平面上讨论闭曲线 $\gamma$ 关于不在 $\gamma$ 上的点 $z_0$ 的指数.

设 $\gamma$ 的方程为 $z=f(t)$, $t\in[0,1]$. 由于 $f(t)\neq z_0$ 对任意 $t$ 成立，则存在 $\rho>0$ 使得 $|f(t)-z_0|>\rho$ 对任意 $t$ 成立. 根据一致连续性，存在分点 $t_i\,(i=1,2,\cdots,n)$:

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=1$$

使得当 $t\in[t_i,t_{i+1}]$, 有 $|f(t)-f(t_i)|<\rho$. 置

$$w_i=\frac{f(t_{i+1})-z_0}{f(t_i)-z_0}.$$

因为 $|w_i-1|<1$, 所以 $\mathbf{Re}\,w_i>0$. 因此，存在使 $\arg w_i>0$ 的唯一值 $\theta_i\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. 显然，$\sum\theta_i$ 是 $2\pi$ 的整数倍. 将

$$n(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi}\sum\theta_i$$

称为 $\gamma$ 关于 $z_0$ 的<u>环绕次数</u>或<u>指数</u>. 还应指出 $n(\gamma,z_0)$ 与分割无关. 事实上，设有新分点 $\tau\in(t_i,t_{i+1})$, 若将关于 $[t_i,\tau]$ 和 $[\tau,t_{i+1}]$ 的新幅角分别记为 $\theta_i'$ 和 $\theta''_i$, 则有

$$\theta_i=\theta_i'+\theta''_i+k\cdot 2\pi\qquad(k\in\mathbf{Z}).$$

但由上面知三个角的绝对值都小于 $\frac{\pi}{2}$, 故 $k<\frac{3}{4}$, 因此 $k=0$. 这说明 $n(\gamma,z_0)$ 与分割无关.

**注**　若 $\gamma$ 是不过点 $a$ 逐段可微的闭曲线，则

$$n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{dz}{z-a}.$$

### 6. 曲线指数的连续性

**定理 3**　指数 $n(\gamma,z_0)$ 关于变量 $z_0$ 在 $\gamma$ 的余集上是连续函数，从而在余集的每分支上是常数.

**证**　采用与上面相同的记号并取 $z_0'$ 接近 $z_0$ 使 $|z_0-z_0'|<\rho$，且对任意 $t$ 有 $|f(t)-z_0'|>\rho$. 对 $z_0$ 和 $z_0'$，用相同的分割来定义 $n(\gamma,z_0)$ 和 $n(\gamma,z_0')$. 置

$$v_i=\frac{f(t_i)-z_0'}{f(t_i)-z_0}.$$

同样有 $|v_i-1|<1$，从而 $\alpha_i:=\arg v_i$ 必被唯一确定，且满足关系 $\alpha_i\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. 但

$$v_i=\frac{f(t_{i+1})-z_0}{f(t_i)-z_0}\cdot\frac{f(t_{i+1})-z_0'}{f(t_{i+1})-z_0}\cdot\frac{f(t_i)-z_0'}{f(t_{i+1})-z_0'}.$$

故关于 $z_0'$ 的幅角 $\theta_i'$ 与 $\theta_i$ 的关系为

$$\theta_i'=\theta_i+\alpha_{i+1}-\alpha_i+k\cdot 2\pi\qquad(k\in\mathbf{Z}).$$

由 $|k|<1$ 可得 $k=0$. 从而 $\sum\theta_i'=\sum\theta_i$，即得 $n(\gamma,z_0)$ 连续. 由于 $n(\gamma,z_0)$ 只取整数值，则在连通集上必取常数. 还应当指出，当 $z_0$ 属于余集的无界分支时，易证 $n(\gamma,z_0)=0$. ▌

### 7. 曲线指数在形变下的不变性

**定理 4**　当 $\gamma$ 作不通过 $z_0$ 的形变时，$n(\gamma,z_0)$ 不变.

**证**　设 $f(t,u)$ 定义一个变形. 又设对任意 $t\in[0,1]$、对任意 $u\in[0,1]$ 有 $f(t,u)\neq z_0$. 于是可找到一个数 $\rho>0$ 和子线段族 $[t_i,t_{i+1}]$、$[u_j,u_{j+1}]$ 使 $|f(t,u)-z_0|>\rho$，且对于任意 $t\in[t_i,t_{i+1}]$ 和任意 $u\in[u_j,u_{j+1}]$ 有 $|f(t,u)-f(t_i,u_j)|<\rho$. 设 $\theta_i$ 和 $\theta_i'$ 是分别对应于 $u=u_j$ 和 $u=u_{j+1}$ 的幅角. 取

$$\beta_i=\arg\frac{f(t_i,u_{j+1})-z_0}{f(t_i,u_j)-z_0}.$$

则有 $\beta_i\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且

$$\theta_i' - \theta_i = \beta_{i+1} - \beta_i + k\cdot 2\pi \qquad (k\in\mathbf{Z}).$$

类似前面推理可得 $k=0$. 因此 $\sum\theta_i' = \sum\theta_i$. 已经得出：当 $u$ 从 $u_j$ 变到 $u_{j+1}$ 时指数不变. 因此对应于 $u=0$ 和 $u=1$ 的两条曲线有相同的指数. ▌

### 8. Jordan 曲线定理

本段落用 $S$ 表示复平面，用 $K:=S\cup\{\infty\}$ 表示复球面.

**定理 5**　设 $A_1$ 和 $A_2$ 是两个闭集，而 $A_1\cap A_2$ 连通. 若点 $a$ 和 $b$ 既不被 $A_1$ 分隔也不被 $A_2$ 分隔，则亦不被 $A_1\cup A_2$ 分隔.

**证**　不妨设 $a=0$、$b=\infty$. 由所设必存在连接 0 与 $\infty$ 的弧 $C_j$ 不与 $A_j$ 相交($j=1,2$). 因为 $S\backslash C_j$ 的每个分支不含 0 和 $\infty$，所以在 $S\backslash C_j$ 内存在 $\log z$ 的单值分支 $f_j(z)$. 由于连通集 $A_1\cap A_2$ 恰好位于 $S\backslash(C_1\cup C_2)$的一个分支 $F$ 之中(若 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则可取其任一分支)，故可取 $\log z$ 的单值分支使得在 $F$ 内，$f_1(z)\equiv f_2(z)$.

因为紧集 $A_1\backslash F$ 与 $A_2\backslash F$ 不相交，所以可找到不相交的开集 $V_1$ 和 $V_2$ 使得

$$A_j\backslash F\subset V_j\subset S\backslash C_j,\quad j=1,2.$$

在开集 $H:=V_1\cup V_2\cup F$ 内定义

$$f(z)=\begin{cases}f_j, & \text{当 } z\in V_j \quad (j=1,2);\\ f_1(z)=f_2(z), & \text{当 } z\in F,\end{cases}$$

则 $f(z)$在 $H$ 内单值解析，且 $e^{f(z)}=z$.

假设 $A_1\cup A_2$分隔 0 与 $\infty$，则 $S\backslash(A_1\cup A_2)$的包含点 0 的分支 $G$ 必有界. 用直径 $\delta<\operatorname{dist}(\partial H,\partial G)$ 的正方形网格覆盖平面 $S$ 使得点 0 是某个正方形的内点(参照 Ahlfors [1,P140]). 考虑 $G$ 内的那些闭正方形. 用 $Q_i$ ($i=1,\cdots,n$)表示其正向边界，并定义其周线为 $C=Q_1+\cdots+Q_n$. 凡相邻的两个正方形 $Q_i$、$Q_k$ 的公共边必相消，

剩余的边与 $\partial G$ 的距离$\leqslant\delta$，故位于 $H$ 之中，因为 $\partial G\subset H$. 又由于 $f(z)$在 $H$ 内单值解析，且 $e^{f(z)}=z$，故 $z^{-1}=f'(z)$. 从而环绕次数

$$n(C,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C z^{-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_C f'(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

但另一方面，由于 $0\in G\setminus H$，点 0 是某个正方形的内点，因此

$$n(C,0)=\sum_{i=1}^{k}n(C_i,0)=1.$$

矛盾. 由此可见 $A_1\cup A_2$ 不能分隔 0 与 $\infty$. ▍

**推论**　如果 $J$ 是 Jordan 弧，那么 $S\setminus J$ 必连通.

**证**　设给定两点 $a$、$b\overline{\in}J$，要证它们不被 $J$ 所分隔.

把 $J$ 划分成一些足够小的子弧 $J_k(k=1,\cdots,m)$，使每段子弧位于一个不含 $a$、$b$ 的圆盘之中. 由于这些子弧都不分隔 $a$ 和 $b$，且 $J_1$ 和 $J_2$ 恰有一个公共点，故由定理 5 可知 $J_1\cup J_2$ 不分隔 $a$ 和 $b$；同理可证，$J_1\cup J_2\cup J_3$ 也不分隔 $a$ 和 $b$；如此不断类推，即可知 $J=J_1\cup\cdots\cup J_m$ 不分隔 $a$ 和 $b$. ▍

**定理 6** (**Jordan 曲线定理**)　设 $J\subset S$ 是一条(闭)Jordan 曲线，则 $K\setminus J$ 恰好有两个分支，并且每个分支都以 $J$ 为边界.

有界的分支称为<u>内区域</u>，而包含$\infty$的分支称为<u>外区域</u>.

**证**　1) 设 $G$ 是 $K\setminus J$ 的任何一个分支，要证 $\partial G=J$.

显然 $\partial G\subset J$，下面证 $\partial G\supset J$. 为此设 $\zeta\in J$、$z_0\in G$. 取 $J$ 的子弧 $J_n'$ 使得

$$\zeta\in J_n'\subset D_n=\{z\,|\,|\zeta-z|<1/n\}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由上面推论可知余弧 $J_n''=J\setminus J_n'$ 不分隔 $\zeta$ 和 $z_0$. 因而存在一条从 $z_0$ 到 $\zeta$ 的曲线 $P_n$ 不与 $J_n''$ 相交. 设 $z_n$ 是 $P_n$ 与 $\partial D_n$ 的第一个交点. 位于 $P_n$ 上 $z_0$ 与 $z_n$ 之间的弧段既不与 $J_n'$ 也不与 $J_n''$ 相交，故可得 $z_n\in G$. 又因为 $z_n\to\zeta$，所以可得 $\zeta\in\partial G$，从而 $J=\partial G$.

2) 在 $J$ 上取适当的两点 $\zeta_1$、$\zeta_2$，使得连接 $\zeta_1$、$\zeta_2$ 的直线段 $l$ 与 $J$ 没有其它交点. 设 $J'$ 和 $J''$分别是 $J$ 上从 $\zeta_2$ 到 $\zeta_1$ 和从 $\zeta_1$ 到

$\zeta_2$ 的两段子弧，则 $C:=J'\cup l$ 是一条(闭)Jordan 曲线. 选取一个以 $l$ 的中点为心的圆盘 $D_0$，使其同 $C$ 仅在 $l$ 上相交. 设 $G_1$、$G_2$ 是 $K\backslash C$ 的两个分支，它们分别包含构成集合 $D_0\backslash l=D_0\backslash C$ 的两个半圆盘. 根据 1)，$K\backslash C$ 不存在其它分支.

现在证明 $G_1\neq G_2$. 若不然，则两点 $z_1\in G_1\cap D_0$ 和 $z_2\in G_2\cap D_0$ 不被 $C$ 所分隔. 又由于它们不被 $(C\backslash D_0)\cup\partial D_0$ 所分隔，并且这两个集具有连通的交集 $C\backslash D_0$，故由定理 5 可知 $z_1$ 和 $z_2$ 不被它们的并 $C\cup\partial D_0\supset l\cup\partial D_0$ 所分隔. 显然矛盾. 因此 $K\backslash C$ 恰有两个分支 $G_1$ 和 $G_2$.

3) 设 $D'$ 是以 $J'$ 上某点为心的圆盘，使得 $D'\cap(l\cup J'')=\varnothing$. 下面证明，任意两点 $w_1\in G_1\cap D'$、$w_2\in G_2\cap D'$ 均被 $J$ 所分隔. 如若不然，由于 $(J''\cup l)\cap J=J''$ 连通，而 $w_1$ 和 $w_2$ 不被 $J''\cup l$ 所分隔，则由定理 5 可知 $w_1$ 和 $w_2$ 不被 $(J''\cup l)\cup J=J\cup l$ 所分隔，但 $G_1$ 和 $G_2$ 是 $K\backslash(J'\cup l)$ 的不同分支. 这是不可能的. 由此可见，$J$ 的余集 $K\backslash J$ 至少有两个不同分支 $H_1$、$H_2$ 使得 $w_1\in H_1$、$w_2\in H_2$.

设 $H$ 是 $K\backslash J$ 的任意一个分支. 根据 1)，$J$ 是 $H$ 的边界，故存在 $w\in H\cap D'$. 但 $H\cap D'\subset G_1\cup G_2$，于是 $w$ 必属某个 $G_j$. 从而 $w$ 和 $w_j$ 既不被 $J'\cup l=C$ 所分隔，也不被 $J''\cup l$ 所分隔. 显然它们的交集 $(J'\cup l)\cap(J''\cup l)=l$ 是连通的，于是根据定理 5，$w$ 和 $w_j$ 不被 $(J'\cup l)\cup(J''\cup l)=J\cup l$ 所分隔，因而不被 $J$ 所分隔. 由此可见 $H=H_j$，于是 $K\backslash J$ 仅有两个不同的分支. 最后，由 1)即可知 $\partial H_1=\partial H_2=J$. ▌

**注**　从第三章 § 3.4 将证明的 Riemann 映照定理可得： 区域 $G$ 是 Jordan 区域当且仅当 $G$ 是某 Jordan 曲线的内区域.

**推论 1**　若 $J$ 是分段光滑的 Jordan 曲线，则在 $J$ 的内区域里 $n(J,w)=\pm1$，而在 $J$ 的外区域里 $n(J,w)=0$.

**证**　上面定理证明的 3)中给定两点 $w_1$、$w_2$ 分属 $K\backslash J$ 仅有的两个不同分支. 点 $w_j$ 同 $D_0\backslash l$ 两分支之一的一个适当的点 $z_j$ 属于

$K\backslash C$ 的同一个分支．因为 $n(J''-l,w_j)=0$，所以

$$n(J,w_j)=n(C,w_j)=n(C,z_j).$$

又显然有　$n(C,z_2)=n(C,z_1)\pm1$，　而在 $K\backslash J$ 的无界分支上必有 $n(J,z)=0$，故推论 1 得证．▌

**推论 2**　设 $G\subset S$ 是区域，而 $H$ 是 Jordan 区域．若 $\partial G\subset\bar{H}$，则 $G\subset H$.

**证**　设 $H^*$ 是 Jordan 曲线 $\partial H$ 的外区域．因为 $H^*\cap\partial H=\varnothing$、$G$ 连通且 $\infty\in H^*$、$\infty\overline{\in}G$，所以 $G\subset K\backslash H^*=\bar{H}$．又由于 $G$ 是开集，故 $G\subset H$．▌

### 9.　穿孔平面的基本群

平面去掉一点叫做<u>穿孔平面</u>．它与圆环同胚．

**定理 7**　穿孔平面的基本群是无限循环群．

**证**　采用复数记号．设 $z=0$ 被挖去．取 $z=1$ 为闭曲线的起点．用参数方程 $z=e^{2\pi it}$ 表示单位圆，记作 $\alpha$.

首先从 $z=1$ 出发的任一条闭曲线可<u>中心投影</u>到 $\{z\mid |z|=1\}$ 上的一条曲线而被变形．其次，借助于一致连续性，任一条这样的曲线 $\gamma$ 可以写做 $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_n$，其中每个 $\gamma_k$ 或者不通过 $z=-1$ 或者不通过 $z=1$．容易看出每个 $\gamma_k$ 可以变形为它的两端投影间的圆弧之一．假设变形已进行且用同样记号 $\gamma_k$ 表示这圆弧．对 $2\leqslant k\leqslant n$，把从 1 出发的沿 $\{z\mid |z|=1\}$ 至 $\gamma_k$ 之起点的圆弧之一记作 $\sigma_k$．置 $\sigma_1=\sigma_{n+1}=1$，则

$$\gamma\approx(\sigma_1\gamma_1\sigma_2^{-1})(\sigma_2\gamma_2\sigma_3^{-1})\cdots(\sigma_n\gamma_n\sigma_{n+1}^{-1}),$$

每个因子 $(\sigma_k\gamma_k\sigma_{k+1}^{-1})$ 由三段弧组成．对所有可能情况进行检验，可发现它同伦于 1、$\alpha$ 或 $\alpha^{-1}$．因此 $\gamma$ 同伦于幂 $\alpha^m$.

还要证明当 $m\neq0$ 时 $\alpha^m$ 不同伦于 1．事实上，显然有 $n(\alpha^m,0)=m$ 和 $n(1,0)=0$，故 $\alpha^m\approx1$ 当且仅当 $m=0$．▌

**注**　本定理证明过程对开或闭的圆环仍然有效.

### 10.　映照的度数

设 $\varphi$ 是定义在复 $z$— 平面上开集 $D$ 的复值连续函数. 对于点 $z_0\in D$, 若有 $z_0$ 的邻域 $V$ 使得当 $z\neq z_0$ 时 $\varphi(z)\neq\varphi(z_0)$, 则称 $\varphi$ 在点 $z_0$ 是正则的. 记 $\Omega=\{z|0<|z|<r\}$, 其象 $\varphi(\Omega)$ 记为 $\Omega'$, 那么有 $w_0=\varphi(z_0)\overline{\in}\Omega'$, 且 $\varphi$ 确定一个把 $\mathscr{F}(\Omega)$ 映入 $\mathscr{F}(\Omega')$ 的同态映照 $\Phi$. 它们都是无限循环群. 事实上它们分别产生于圆周

$$\alpha:=\{z|z-z_0=(a-z_0)e^{2\pi i t}\}\quad 和$$

$$\beta:=\{w|w-w_0=(b-w_0)e^{2\pi i t}\},$$

其中 $b=\varphi(a)$, $a\in\Omega$.

若有整数 $d$ 使得 $\Phi(\alpha)=\beta^d$, 则由 $\Phi(\alpha^m)=\beta^{md}$ 可知 $\Phi$ 被完全确定. 若 $d=0$, 则 $\mathscr{F}(\Omega)$ 被映入 $\mathscr{F}(\Omega')$ 的单位元素. 又由于 $\Phi(\alpha^m)=\beta^{md}=1$ 蕴含 $m=0$, 所以当 $d\neq0$ 时就得到一个把 $\mathscr{F}(\Omega)$ 映上 $\beta^d$ 所产生的子群的一个同构映照.

数 $d=d(\varphi)$ 称为映照在点 $z_0$ 的度数, 它既不依赖于 $a\in\Omega$ 的选择, 也不依赖于 $\Omega$ 的选择.

若映照 $\psi$ 在 $w_0:=\varphi(z_0)$ 点正则, 则 $\psi\circ\varphi$ 在点 $z_0$ 正则且

$$d(\psi\circ\varphi)=d(\psi)d(\varphi).$$

如果 $\varphi$ 是同胚映照, $D$ 是个区域, 则 $\varphi(D)$ 是开的. 同样可以定义 $\varphi^{-1}$ 的度数.

显然 $d(\varphi)d(\varphi^{-1})=1$, 则由 $\varphi$ 为同胚知 $d(\varphi)=\pm1$.

**定理 8**　区域的拓扑映照的度数恒为 $+1$ 或 $-1$.

度数为 $+1$ 和 $-1$ 的拓扑映照分别称为保向的和逆向的.

### 11.　曲面的可定向性

可被拓扑映上平面开集的曲面区域称为平面型区域.

将实现上述映照的同胚 $h$ 分成两类. 为此规定 $h_1$ 和 $h_2$ 是同类当且仅当 $h_1\circ h_2^{-1}$ 是保向的. 记 $\bar{h}(p)=\mathbf{Re}\,h(p)-\mathbf{Im}\,h(p)$. 由于映照 $h\circ\bar{h}^{-1}$ 是逆向的，所以 $h$ 与 $\bar{h}$ 不在同一类里. 对于任意映照 $h_1, h\circ h_1^{-1}$ 和 $\bar{h}\circ h_1^{-1}$ 中必有一是正向的，故说明恰有两大类存在.

选择两类之一作为正向类就规定了这平面型区域的定向.

定向区域 $V$ 的子集 $V'$ 可由 $V$ 诱导出定向. 两相交平面型区域 $V_1$ 与 $V_2$ 在共同子区域上诱导相同定向时称它们是相容的.

**定义 8**　曲面 $F$ 称为可定向的，如果可以在 $F$ 的每个平面型区域上规定正方向，使得任意两个相交的平面型区域的定向都是相容的. 否则，称曲面 $F$ 是不可定向的.

可定向性是拓扑不变的. 曲面可分成可定向与不可定向两大类. 众所周知的不可定向曲面的典型例子是 Möbius 带.

可以证明，可定向曲面有且仅有两种不同定向.

如果可定向曲面 $F$ 有一由平面型区域组成的开覆盖，若给这族区域用相容方法定向，则曲面 $F$ 的定向即被确定.

## 12.　镶边曲面

**定义 9**　设 $\Gamma$ 是曲面 $F$ 的一子集. 若任意一点 $p\in\Gamma$ 都有邻域 $V_p$ 与平面单位圆盘同胚且使得 $V_p\cap\Gamma$ 恰好与圆盘直径相对应，则称 $\Gamma$ 是 $F$ 的一维子流形.

**定义 10**　设 $\bar{F}$ 是非曲面的连通 Hausdorff 空间，若 $\bar{F}$ 上的每一点 $p$ 都有邻域 $V_p$ 与闭上半平面的一个相对开集 $U_z$ 同胚，则称 $\bar{F}$ 是镶边曲面.

设 $p\in\bar{F}$. 若 $p$ 有开邻域 $V_p$ 使得与其同胚的闭上半平面 $\bar{H}$ 之相对开集 $U_z$ 是由 $\bar{H}$ 的内点组成，则 $p$ 的每个开邻域必有相同性质. 将具有这种性质的点的全体记为 $F$，并记 $\partial F=\bar{F}\backslash F$. 易知 $F$ 和 $\partial F$ 总可被分别映入开上半平面和实轴. 将 $F$ 称为 $\bar{F}$ 的内部，

显然 $F$ 是一开曲面. 将 $\partial F$ 称为 $F$ 的边界，而 $\partial F$ 的分支称为围道. 显然，$\partial F$ 可看成是一维子流形，而每个紧围道必为 Jordan 曲线.

今后凡涉及镶边曲面的概念，式子 $\bar{F}=F\cup\partial F$ 均表示 $F$、$\partial F$ 分别是镶边曲面 $\bar{F}$ 的内部、边界.

若 $\bar{F}$ 是紧致的，则 $\partial F$ 可看成是 $F$ 的理想边界 $\beta(F)$ 的实现；若 $\bar{F}$ 是非紧致的，则(非空) $\partial F$ 只是 $F$ 的理想边界 $\beta(F)$ 的部分实现，而 $\beta(F)$ 的其余部分即为 $\bar{F}$ 的 Alexandroff 点 $\beta(\bar{F})$.

**定义** 9　若曲面 $F$ 的子区域 $G$ 与它的外部有相同的边界 $\Gamma$，且 $\Gamma$ 是 $F$ 的一维子流形，则说 $G$ (被)正则嵌入曲面 $F$. 若 $G$ 具有紧闭包，且其余集的各分支都是非紧致的，则称 $G$ 为 $F$ 的正则(子)区域.

设 $\bar{F}:=F\cup\partial F$ 是镶边曲面，而 $\bar{F}_1:=F_1\cup\partial F_1$ 是与之同胚的拓扑空间. 又设 $\varphi$：　$\bar{F}_1\to\bar{F}$ 是同胚映照. 对任意 $q\in\bar{F}$，设其参数映照为 $z=h(q)$. 对任意 $\tilde{p}\in\bar{F}_1$，若对应于 $p:=\varphi(\tilde{p})$，将 $\tilde{p}$ 参数映照取为 $h_1(\tilde{p})=\overline{h(p)}$，则说 $\bar{F}_1$ 是由 $\bar{F}$ 关于边界 $\partial F$ 对称复制而成的对称面或对称象；而 $\tilde{p}$ 称为 $p$ 的对称点或对称象. 现将 $F_1\cup\partial F_1$ 和 $F_1\cup\partial F_1$ 沿 $\partial F$ 粘合，由此获得一曲面，记为 $\hat{F}$. 事实上，注意到 $\partial F$ 的点与其在 $\partial F_1$ 上的对应点有相同的(实)坐标. 因此对任意 $p\in\bar{F}$，若记 $\tilde{p}=\varphi(p)$，则 $p$、$\tilde{p}$ 分别有邻域 $V$、$\tilde{V}$ 被 $h$、$h_1$ 分别同胚映成单位圆盘的上、下半闭半圆盘. 于是 $V\cup\tilde{V}$ 即为 $p$ 的参数邻域. 这就证明了 $\hat{F}$ 是一曲面. 将曲面 $\hat{F}$ 称为 $F$ 关于 $\partial F$ 的 Schottky 双倍(面). 由此可得下面定理：

**定理** 9　每一个镶边曲面 $\bar{F}$ 都可被正则嵌入某一曲面. 且若 $\bar{F}$ 是紧致的，则它可被正则嵌入某一闭曲面.

## §2　覆盖面

### 1.　光滑覆盖面

**定义 1**　设 $\tilde{F}$ 是连通 Hausdorff 空间，$f$ 是将 $\tilde{F}$ 映入曲面 $F$ 的映照．如果对任一点 $\tilde{p}_0\in\tilde{F}$，有邻域 $\tilde{V}$ 被 $f$ 拓扑映上 $p_0:=f(\tilde{p}_0)$ 的一个邻域 $V$，则称 $(\tilde{F},f)$ 是曲面 $F$ 的光滑覆盖面．

显然，$f$ 是连续的，且开集被映为开集．事实上，设 $\tilde{F}$ 上有开集 $\tilde{O}$，对任一点 $\tilde{p}_0\in\tilde{O}$，取 $p_0:=f(\tilde{p}_0)$ 的一个开邻域 $V_0\subset V$，则 $\tilde{U}_0:=f^{-1}(V_0)\cap\tilde{O}$ 是开集．那么 $\tilde{U}_0(\subset\tilde{V})$ 和 $U_0:=f(\tilde{U}_0)$ 都是开的，且为相互拓扑对应．从而 $f(p_0)\in U_0\subset f(\tilde{O})$．故 $f(\tilde{O})$ 是开集．

### 2.　射影、弧的提升

设 $(\tilde{F},f)$ 是曲面 $F$ 的光滑覆盖面，而 $\tilde{\gamma}$: $\tilde{p}=\tilde{\varphi}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 是 $\tilde{F}$ 上给定的一段弧．那么 $\tilde{\gamma}$ 在 $F$ 上的象 $\gamma=f(\tilde{\gamma})$必为满足关系 $p=f(\tilde{\varphi}(t))$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧，称为弧 $\tilde{\gamma}$ 在 $F$ 上的射影．反之，若先给定 $F$ 上的弧 $\gamma$: $p=\varphi(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，任一段以 $\tilde{p}_0$ 为起点、以 $\gamma$ 为射影的 $\tilde{F}$ 上的弧 $\tilde{\gamma}$ 称为从 $\tilde{p}_0$ 出发的弧 $\gamma$ 在 $\tilde{F}$ 上的(弧)提升．

**定理 1**　在光滑覆盖面上，任意两条从同一起点出发的同一段弧的(弧)提升是恒同的．

**证**　设这两个(弧)提升由 $\tilde{\varphi}_1$ 和 $\tilde{\varphi}_2$ 给出．置

$$E=\{t\,|\,\tilde{\varphi}_1(t)=\tilde{\varphi}_2(t),\ t\in[0,1]\}.$$

由于 $\tilde{\varphi}_1$ 和 $\tilde{\varphi}_2$ 是连续的，且 $F$ 是 Hausdorff 空间，则 $E$ 为闭集．下面将证明 $E$ 也是相对开的．设 $t_0\in E$，考虑由 $\tilde{\varphi}_1(t_0)=\tilde{\varphi}_2(t_0)$ 决定的邻域 $\tilde{V}$，以及与之对应的点 $\varphi(t_0)$ 和邻域 $V$．由于对应为一对一，则可找到一 $t_0$ 的邻域 $W_0$ 使 $\tilde{\varphi}_1(W_0)\subset\tilde{V}$、$\tilde{\varphi}_2(W_0)\subset\tilde{V}$．由于它们

有相同投影，则 $\tilde{\varphi}_1(t)=\tilde{\varphi}_2(t)$，$t\in W_0$. 这就证明了 $E$ 为相对开集. 但 $0\in E$，则 $E=[0,1]$. ▌

### 3. 正则覆盖面

**定义 2**　设 $\tilde{F}$ 是曲面 $F$ 的光滑覆盖面. 若对于曲面 $F$ 上的任一条弧 $\gamma$，$\tilde{F}$ 上的从盖在 $\gamma$ 的起点上的点出发的任一(弧)提升都存在，则称 $\tilde{F}$ 是曲面 $F$ 的正则覆盖面.

为分析这一定义，考察(弧)提升不存在的情形. 设 $\gamma$ 和 $\tilde{p}_0$ 已给定. 容易看出满足下面条件的点 $t_0\in[0,1]$ 组成之集是相对开的：对于点 $t_0$，存在着从 $\tilde{p}_0$ 出发沿着对应于 $[0,t_0]$ 的子弧的(弧)提升. 事实上，若 $\tilde{\varphi}(t)$ 定义在 $[0,t_0]$，$t_0<1$，则可以确定 $\tilde{\varphi}(t_0)$ 和 $\varphi(t_0)$ 的一一对应的邻域. 利用这一对应性，$\tilde{\varphi}(t)$ 可越过 $t_0$ 连续延拓. 如果假设不存在 $\gamma$ 的(弧)提升，可得出满足条件的集是半开线段 $[0,\tau)$，其中 $0<\tau\leqslant 1$.

函数 $\tilde{\varphi}$ 定义在 $[0,\tau)$ 上. 应指出，当 $t$ 趋于 $\tau$ 时 $\tilde{\varphi}(t)$ 趋于 $\tilde{F}$ 的理想边界. 否则，必存在一紧集 $C\subset\tilde{F}$ 和一值列 $t_n\to\tau$ 使 $\tilde{\varphi}(t_n)\in C$，于是可以选取一子列 $t_{n_k}$ 使 $\tilde{\varphi}(t_{n_k})$ 收敛于某一点 $\tilde{a}\in C$. 根据连续性可得 $a=f(\tilde{a})=\varphi(\tau)$. 现选取 $\tilde{a}$，$a$ 的对应邻域 $\tilde{V}$，$V$，且记 $f^{-1}$ 为 $f$ 关于 $\tilde{V}$ 的限制的反函数. 存在 $\tau'<\tau$ 使得对 $t\in[\tau',\tau]$ 有 $\varphi(t)\in V$. 若在 $[\tau',\tau]$ 中置 $\tilde{\varphi}=f^{-1}\circ\varphi$，则 $\tilde{\varphi}$ 从 $[0,\tau']$ 被延拓到 $[0,\tau]$. 这与 $\tau$ 的定义矛盾，论断得证.

称 $\varphi(\tau)$ 为 $f$ 的渐近值. 由 $\tilde{\varphi}$，$0\leqslant t<\tau$ 所描绘的路径是对应的确定渐近路径. 正则覆盖面是不存在确定渐近路径的光滑覆盖面. 特别，由于紧致曲面没有理想边界，故紧致的光滑覆盖面总是正则的.

### 4. 单值性定理

**定理 2**　(单值性定理) 设 $(\tilde{F},f)$ 是曲面 $F$ 的正则覆盖面.

若 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$ 是 $F$ 上的从 $a$ 到 $b$ 的同伦弧，则它们对应的从盖在 $a$ 上同一点 $\tilde{a}$ 出发的(弧)提升 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$ 必终止于同一点 $\tilde{b}$. 而且 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$ 在 $\tilde{F}$ 上是同伦的.

**证**　设定义在 $\{(t,u)|0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant u\leqslant 1\}$ 上的 $\varphi(t,u)$ 是 $\gamma_1$ 到 $\gamma_2$ 的变形. 如果可以构造一个连续函数 $\tilde{\varphi}(t,u)$ 使得 $\tilde{\varphi}=\varphi$ 而且 $\tilde{\varphi}(0,0)=\tilde{a}$，那么定理得证. 事实上，此时 $\tilde{\varphi}(0,u)$ 和 $\tilde{\varphi}(1,u)$ 必定分别退缩于常值 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$，而 $\tilde{p}=\tilde{\varphi}(t,0)$ 和 $\tilde{p}=\tilde{\varphi}(t,1)$ 将分别是 $\tilde{\gamma}_1$ 和 $\tilde{\gamma}_2$ 的方程.

对任意固定的 $u$，定义 $\tilde{\varphi}(t,u)$ 是沿着曲线 $p=\varphi(t,u)$ 从起始点 $\tilde{a}$ 出发的(弧)提升. 必须证明 $\tilde{\varphi}(t,u)$ 关于双变量是连续的.

对给定的 $u_0$，设 $E$ 是具有下面性质的全体 $\tau\in[0,1]$ 所成之集：对这些 $\tau$，$\tilde{\varphi}$ 关于 $\{(t,u)|0\leqslant t\leqslant\tau,\ 0\leqslant u\leqslant 1\}$ 的限制在线段 $\{(t,u_0)|0\leqslant t\leqslant\tau\}$ 上是双变元连续的. 将证明 1 属于 $E$. 由 $u_0$ 任意性即得 $\tilde{\varphi}$ 在闭单位方形内的连续性.

$E$ 的定义使得 $E$ 或是半开线段 $[0,t_0)$ 或是闭线段 $[0,t_0]$. 对这两种情形，各自选取 $\tilde{\varphi}(t_0,u_0)$，$\varphi(t_0,u_0)$ 的开邻域 $\tilde{V}$，$V$ 使它们相互拓朴对应. 记 $f^{-1}$ 为 $f$ 的取值于 $\tilde{V}$ 逆元在 $V$ 上的限制. 则存在 $\delta>0$ 满足：

(1) 当 $|t-t_0|<\delta$ 且 $|u-u_0|<\delta$ 时，$\varphi(t,u)\in V$；

(2) 当 $|t-t_0|<\delta$ 时，$\tilde{\varphi}(t,u_0)\in\tilde{V}$.

不言而喻，只要考虑单位方形内的点 $(t,u)$.

如果 $E$ 是闭线段时，那么选择 $t_1=t_0$；如果 $E$ 是半开时，那么选择 $t_0-\delta<t_1<t_0$. 由于 $\tilde{V}$ 是开的，且 $\tilde{\varphi}(t,u)$ 关于 $u$ 在 $u=u_0$ 点连续，故可找到一正数 $\eta\leqslant\delta$ 使得当 $|u-u_0|<\eta$ 时，$\tilde{\varphi}(t,u)\in\tilde{V}$. 对这些值，即有 $\tilde{\varphi}(t,u)=f^{-1}(\varphi(t,u))$. 在矩形

$$\{(t,u)|0\leqslant t\leqslant t_0+\delta,\ |u-u_0|<\eta\}$$

的处在单位方形中的那部分上，定义函数 $\tilde{\varphi}_1(t,u)$ 如下：当 $t\leqslant t_1$ 时它等于 $\tilde{\varphi}(t,u)$；而当 $t>t_1$ 时等于 $f^{-1}(\varphi(t,u))$. 则 $\tilde{\varphi}_1$ 对固定的

$u$ 关于 $t$ 连续，且 $f\circ\tilde{\varphi}_1=\varphi$. 根据连续的唯一性，$\tilde{\varphi}_1$ 与 $\tilde{\varphi}$ 一致，而且可得出 $\tilde{\varphi}$ 关于双变元在线段 $\{(t,u_0)\,|\,0\leqslant t\leqslant t_0+\delta\}$ 处于单位闭方形的那一部分上是连续的. 这与 $E$ 的定义矛盾，除非 $E$ 是闭的且 $t_0=1$. 因此 1 属于 $E$. ▌

下面的定理可看做单值性定理的推论.

**定理 3**　如果 $(\tilde{F},f)$ 是单连通曲面 $F$ 的正则覆盖面，则 $f$ 是把 $\tilde{F}$ 映上 $F$ 的同胚映照.

**证**　选择点 $\tilde{a}\in\tilde{F}$，设 $a\in F$ 是它的投影. 对任一点 $b\in F$，可以从点 $a$ 到 $b$ 引一条弧 $\gamma$. 于是，在 $\tilde{F}$ 上从 $\tilde{a}$ 出发的 $\gamma$ 的(弧)提升必终止于盖在 $b$ 上的点 $\tilde{b}$. 因此 $F$ 上的每一点都是 $\tilde{F}$ 上的点的投影.

设 $\tilde{a}_1$、$\tilde{a}_2\in\tilde{F}$ 有同样的投影 $a$. 用弧 $\tilde{\gamma}$ 把 $\tilde{a}_1$ 和 $\tilde{a}_2$ 相连，它的投影是闭曲线，记为 $\gamma$. 显然，$\tilde{\gamma}$ 是从 $\tilde{a}_1$ 出发的 $\gamma$ 的(弧)提升，单连通性蕴含 $\gamma$ 是同伦于 1 的. 根据单值性定理 $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2$. 已证明了 $f$ 是一对一的，故必须是双方连续的. ▌

### 5.　分支覆盖面

先从单位圆的分支覆盖面着手.

对正整数 $m$，映照 $w=z^m$ 将单位圆 $\{z\,|\,|z|<1\}$ 映上单位圆 $\{w\,|\,|w|<1\}$ 使得每一点 $w(\neq 0)$ 有 $m$ 个逆象 $w^{1/m}$，而 $z=0$ 只对应原点 $w=0$. 常说该对应定义了以原点为<u>支点</u>的 $\{w\,|\,|w|<1\}$ 的覆盖面. 称 $m$ 为支点的<u>重数</u>，而 $m-1$ 称为支点的<u>阶</u>.

现在将带有支点的覆盖面的概念进行推广.

**定义 3**　设连续映照 $f$ 将局部紧连通的 Hausdorff 空间 $\tilde{F}$ 映入曲面 $F$. 如果对每一点 $\tilde{p}\in\tilde{F}$ 都有邻域 $\tilde{V}$ 使得 $(\tilde{V}\setminus\{\tilde{p}_0\},f)$ 是曲面 $F\setminus\{f(\tilde{p}_0)\}$ 的光滑覆盖面，那么称 $\tilde{F}$ 是 $F$ 的一个<u>覆盖面</u>.

显然光滑覆盖面必为覆盖面. 这一点说明这定义的合理性.

为直接从定义得出某些结果，先确定一包含在 $\tilde{V}$ 中的 $\tilde{p}_0$ 的紧致邻域 $\tilde{U}$. $\tilde{U}$ 的边界被 $f$ 映上一闭集 $B$，它不包含 $p_0:=f(\tilde{p}_0)$. 因此，可以在 $F$ 上找到一个 Jordan 区域 $\Delta$ 使它包含 $p_0$ 且与 $B$ 不交. $f^{-1}(\Delta)$ 的包含 $\tilde{p}_0$ 的分支 $\tilde{\Delta}$ 不可能与 $\tilde{U}$ 的边界相交，因此它包含在 $\tilde{U}$ 中，从而是相对紧致的.

记 $\Delta_0=\Delta\setminus\{p_0\}$，$\tilde{\Delta}_0=\tilde{\Delta}\setminus\{\tilde{p}_0\}$. 则 $(\tilde{\Delta}_0,f)$ 是 $\Delta_0$ 的正则覆盖. 其光滑性是显然的，下面证明其正则性. 否则，必有 $\Delta_0$ 内一弧 $\gamma$ 使对应盖在其上有一确定渐近路径 $\tilde{\gamma}$ 导出一渐近值 $p_1\in\Delta_0$. 设 $W$ $(\subset\Delta_0)$ 是 $p_1$ 的一紧邻域，则沿经 $\tilde{\gamma}$ 的动点自某一时刻起后必落在 $f^{-1}(W)$ 内. 由假设 $\tilde{\gamma}$ 不能包含在任何紧集内，故包含 $\tilde{\gamma}$ 的端点部分的分支必是非紧致的. 但另一方面，若将 $f$ 在 $\tilde{\Delta}$ 上的限制记为 $g$，由于 $\tilde{\Delta}$ 的边界与 $f^{-1}(W)$ 不相交，则

$$g^{-1}(W)=f^{-1}(W)\cap\tilde{\Delta}=f^{-1}(W)\cap\overline{\tilde{\Delta}}.$$

从而，$g^{-1}(W)$ 在 $\tilde{F}$ 上是紧致的. 故作为 $\tilde{\Delta}_0$ 的子集 $g^{-1}(W)$ 仍为紧致的. 矛盾.

将此写成下面引理.

**引理 1**　设 $\tilde{F}$ 是 $F$ 的一个覆盖面. 则任何一对对应点 $p_0\in F$ 和 $\tilde{p}_0\in\tilde{F}$ 必分别包含在一对相对紧致的区域 $\Delta$ 和 $\tilde{\Delta}$ 中，而且还有，$(\tilde{\Delta}\setminus\{\tilde{p}_0\},f)$是 $\Delta\setminus\{p_0\}$的正则覆盖. 特别 $\Delta$ 可选为 Jordan 区域.

## 6.　完全覆盖面

对任意覆盖面可以完全类似于光滑覆盖面的方法来定义沿某弧的(弧)提升. 然而唯一性只有对那些不通过支点的(弧)提升才成立. 为此不必建立任意覆盖面的关于(弧)提升的研究. 代之以正则性质的概念是所谓的完全性.

**定义 4**　覆盖面 $(\tilde{F},f)$ 称为<u>完全的</u>，如果对每一点 $p_0\in F$ 都有邻域 $V$ 使得 $f^{-1}(V)$ 的每一分支都是紧致的.

事实上覆盖面的完全性与正则性有着密切的联系. 类似于前面的讨论, 如果(弧)提升不存在, 同样可以证明存在一条确定渐近路径且寻找出一个渐近值. 但相反的结论并不成立, 即尽管(弧)提升总是可能存在, 而渐近值仍可以存在.

但对于光滑覆盖面, 上述性质却是充分必要的.

**定理 4**　光滑覆盖面 $\tilde{F}$ 是正则的当且仅当 $\tilde{F}$ 是完全的.

**证**　设 $(\tilde{F},f)$ 不是 $F$ 的正则覆盖面, 则有一确定渐近路径 $\tilde{\gamma}$ 导出一渐近值 $p_0$. 设 $V$ 是 $p_0$ 的任一邻域, 则路径 $\tilde{\gamma}$ 自某一点后落在 $f^{-1}(V)$ 的一个分支内. 由假设 $\tilde{\gamma}$ 不能包含在任何紧致集内, 因此包含 $\tilde{\gamma}$ 的端点部分的分支不能是紧致的. 故 $\tilde{F}$ 不是完全覆盖.

设 $(\tilde{F},f)$ 是 $F$ 的正则覆盖面. 又设 $\Delta$ 是包含 $p_0\in F$ 的 Jordan 区域, 而 $V\subset\Delta$ 是 $p_0$ 的紧邻域. 考虑 $f^{-1}(V)$ 的任一分支 $\tilde{V}$. 如果证明 $\tilde{V}$ 是紧致的, 则必要性得证.

由于 $\tilde{V}$ 包含在 $f^{-1}(\Delta)$ 的某分支 $\tilde{\Delta}$ 中, 而 $(\tilde{\Delta},f)$ 是 $\Delta$ 的正则覆盖. 据单值性定理, $\Delta$ 的单连通性蕴含着 $f$ 在 $\tilde{\Delta}$ 的限制是一同胚. 用 $g$ 记这一限制, 其单值逆为 $g^{-1}$, 则 $\tilde{V}\subset g^{-1}(V)$. $g^{-1}(V)$ 作为紧致集的连续象仍是紧致的. 但因为 $\tilde{V}$ 是闭集 $f^{-1}(V)$ 的分支, 所以是闭的. 由此 $\tilde{V}$ 作为紧致集的闭集必是紧致的. ▌

下述推论作为正则覆盖的一个判别法是特别有用的.

**推论**　对 $F$ 的一个光滑覆盖 $(\tilde{F},f)$, 设 $G$ 是 $F$ 上的一区域, 又设 $\tilde{G}$ 是 $f^{-1}(G)$ 的相对紧的分支, 则 $(\tilde{G},f)$ 是 $G$ 的正则覆盖.

**证**　对 $p_0\in G$, 设 $V$ 是 $p_0$ 的包含在 $G$ 中的紧邻域. 为方便, 记 $f$ 关于 $\tilde{G}$ 的限制为 $g$. 由于 $\tilde{G}$ 是 $f^{-1}(G)$ 的分支, 那么它的边界点不属于 $f^{-1}(G)$, 更不属于 $f^{-1}(V)$. 则

$$g^{-1}(V)=f^{-1}(V)\cap\tilde{G}=f^{-1}(V)\cap\overline{\tilde{G}}.$$

但 $f^{-1}(V)$ 是闭的, 且 $\overline{\tilde{G}}$ 是紧致的, 因此它们交 $g^{-1}(V)$ 在 $\tilde{F}$ 上是紧致的. 从而在 $\tilde{G}$ 上也是如此. 由此得出 $V$ 具有定义 4 所属性

质，由定理 4，$(\widetilde{G},f)$ 是正则覆盖. ▌

完全覆盖具有下面性质.

**定理 5** $F$ 的完全覆盖 $(\widetilde{F},f)$ 覆盖 $F$ 的每一点具有相同的次数，只要分支点按它的重数计算次数.

**证** 首先证明 $F$ 的每一点至少被覆盖一次. 否则投影 $f(\widetilde{F})$ 必含有边界点 $p_0$. 选择 $p_0$ 的一个邻域 $V$ 使得 $f^{-1}(V)$ 是紧致的. 然后选一连通开邻域 $U\subset V$. 设 $C$ 是 $f^{-1}(U)$ 的一个分支，则 $C$ 是开的，且为相对紧致的. 由于映照 $f$ 是连续的，且把开集映入开集，故 $f(C)$ 是开的，而 $f(\overline{C})$ 是闭的. 但 $C$ 不会与 $f^{-1}(U)$ 的其它分支相交，因此 $f(C)=f(\overline{C})\cap U$. 从而 $f(C)$ 在 $U$ 中是相对闭的. 由于 $U$ 是连通，就有 $f(C)=U$，这与 $p_0$ 是 $f(\widetilde{F})$ 的边界点这一假设相矛盾.

现在考虑一点 $q\in F$，设它至少被覆盖 $n$ 次，也就是说，如果将覆盖在 $q$ 上的全体点记为 $\{\tilde{q}_k\}_k$，则它们的重数之和 $\geqslant n$. 对 $\tilde{q}_k$ 和 $q$，将按引理 1 所确定区域分别记为 $\widetilde{\Delta}_k$ 和 $\Delta_k$. 显然 $\widetilde{\Delta}_k$ 可以选取相互不交. 则对每个包含在所有 $\Delta_k$ 的交集里的点 $p(\neq q)$ 至少被 $n$ 个点所覆盖. 因此至少被覆盖 $n$ 次的点所成之集 $M$ 是开的.

$M$ 的余集是由所有至多被覆盖 $n-1$ 次点组成. 设 $q\overline{\in}M$ 是这类点，且被某些 $\tilde{q}_k$ 所覆盖. 构造对应的 $\widetilde{\Delta}_k$ 和 $\Delta_k$. 设 $V$ 是包含在所有 $\Delta_k$ 里的 $q$ 的连通开邻域. $f^{-1}(V)$ 的每个分支都是 $V$ 完全覆盖面. 因此每一分支都投影到整个 $V$，且必定包含某一点 $\tilde{q}_k$. 由此可知该分支包含在 $\widetilde{\Delta}_k$ 中. 因此，任意一点 $p\in V$ 的逆象必在 $\widetilde{\Delta}_k$ 中，而最多 $n-1$ 个这样的点盖在 $p$ 上. 我们证明了 $M$ 余集是开的. 因为 $F$ 是连通的，则两集之中必有一个是空集. 由此可得所有点被覆盖同样次数. 这个数称为覆盖面的<u>叶数</u>. 当然，它可以是无限的，而且在这种情况下推理将用来证明其基数是相同的. ▌

现在考虑覆盖面的某些区域. 设 $(\widetilde{F},f)$ 是 $F$ 的任意覆盖面，$\Omega$ 是 $F$ 的子区域，则 $f$ 定义 $f^{-1}(\Omega)$ 的每个分支为 $\Omega$ 的覆盖面.

特别假设这些分支之一 $\tilde{\Omega}$ 是相对紧致的. 可断言 $(\tilde{\Omega}, f)$ 是 $\Omega$ 的完全覆盖. 事实上，每一点 $p \in \Omega$ 有闭紧邻域 $V \subset \Omega$. $f^{-1}(V)$ 的分支或包含在 $\tilde{\Omega}$ 中或与 $\tilde{\Omega}$ 不交. 在 $\tilde{\Omega}$ 中的分支是闭的且包含在 $\tilde{\Omega}$ 的紧闭包中，因此它们是紧致的. 这就证明了 $(\tilde{\Omega}, f)$ 是完全的.

而且，$\tilde{\Omega}$ 只有有限叶，因为它可以被有限个邻域所覆盖，而在这些邻域中只有有限个点有同样的投影. 最后，$\tilde{\Omega}$ 的边界 $\partial\tilde{\Omega}$ 投影被映上 $\Omega$ 的边界 $\partial\Omega$. 事实上，由于 $\tilde{\Omega}$ 的闭包是紧的，则它投影到一闭集上，该投影包含 $\Omega$ 而包含在 $\bar{\Omega}$ 中，因此它与 $\bar{\Omega}$ 重合. 因为 $\tilde{\Omega}$ 投影到 $\Omega$ 内，而 $\partial\tilde{\Omega}$ 投影到 $\partial\Omega$ 内，因此可得

$$f(\partial\tilde{\Omega}) = \partial\Omega.$$

称 $\tilde{\Omega}$ 为 $\Omega$ 上的完全覆盖区域. 根据引理 1，可知任意两个对应点有邻域 $\tilde{\Delta}$ 和 $\Delta$ 使得 $\tilde{\Delta}$ 是 $\Delta$ 的完全覆盖区域.

### 7.　覆盖面的可数性

任何一个完全覆盖区域有一个可数基. 事实上，由于曲面 $\tilde{\Omega}$ 的相对紧子集可被有限个 Jordan 区域所覆盖，而每个非空区域有可数基，因此完全覆盖区域被用于证明：

**定理 6**　可数曲面的每个覆盖面都是可数的.

**证**　考虑 $F$ 的一个由一些开集 $\{O_i\}_i$ 组成的可数基. 可以假设 $O_i$ 是连通的，否则可用每个 $O_i$ 的可数多个分支来代替. 每一点 $\tilde{p} \in \tilde{F}$ 都包含在某个 $\Delta$ 上的完全覆盖面 $\tilde{\Delta}$ 中，而投影 $f(p)$ 包含在一个 $O_i(\subset\Delta)$ 中. 因此，$\tilde{p}$ 落在某个 $O_i$ 上的完且覆盖区域中. 换言之，所有 $O_i$ 上的完且覆盖域形成 $\tilde{F}$ 的开覆盖.

可以如此选择 $\{O_i\}_i$ 中的集，使得 $O_1$ 上存在完全覆盖区域 $\tilde{O}_1$. 由于 $O_1$ 与 $O_2$ 的交集由不变的开集组成，且 $\tilde{O}_1$ 有可数基，因而在 $O_2$ 上最多存在可数个完全覆盖区域与 $\tilde{O}_1$ 相交. 同样的推理可用到任意一对 $O_i$、$O_2$.

固定 $\tilde{O}_1$，考虑一族链 $\{\tilde{O}_{i1},\tilde{O}_{i2},\cdots,\tilde{O}_{in}\}$，其中 $\tilde{O}_{ik}$ 是 $O_{ik}$ 上的完全覆盖区域，且 $\tilde{O}_{i1}=O_1$，$\tilde{O}_{ik}\cap\tilde{O}_{i,k+1}\neq\varnothing$. 根据上述推理，这族链的个数是可数的. 另一方面，出现以 $\tilde{O}_1$ 为首的链中的所有 $\tilde{O}_k$ 之并是开的. 而不出现在任一这样的链中的所有 $\tilde{O}_2$ 并也是开的. 这两个集是互余的. 因为 $\tilde{F}$ 是连通的，所以后者必为空集. 因此所有的 $\tilde{O}_k$ 都出现在这些链中，它们是可数的. 由于每个 $\tilde{O}_k$ 有可数基，因而结论对 $\tilde{F}$ 同样是正确的. ▌

## §3 覆盖面的基本群

### 1. 正则覆盖面与基本群的关系

将利用单值性定理证明，一个给定曲面 $F$ 的正则覆盖面与 $F$ 的基本群有着简单的关系.

设 $(\tilde{F},f)$ 是曲面 $F$ 的正则覆盖面，$O\in F$，而 $\tilde{O}$ 是盖在 $O$ 上的点. 若 $F$ 上从 $O$ 点出发的闭曲线 $\gamma$ 所对应的从 $\tilde{O}$ 出发的提升为闭的，则将这类曲线 $\gamma$ 的同伦类组成一族 $\mathscr{D}$，它必为 $\mathscr{F}_0(F)$ 的子群. 事实上，若弧 $\gamma$ 的提升是从 $\tilde{O}$ 出发的闭曲线，则根据单值性定理，对任意与 $\gamma$ 同伦的曲线结论也是对的. 显然对 $\gamma^{-1}$ 结论也同样成立. 如果曲线 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 的对应提升都是从 $\tilde{O}$ 出发的闭曲线，则结论对 $\gamma_1\gamma_2$ 也成立. 这就说明 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{F}_0(F)$ 的子群.

为强调上述构造与 $O$ 有关，将采用下述术语. 若 $(\tilde{F},f)$ 是 $F$ 的正则覆盖面，且 $f(\tilde{O})=O$，就说曲面元 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 覆盖 $(F,O)$. 显然 $\mathscr{D}$ 由 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 唯一确定.

设 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}_1$ 分别由 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 和 $(\tilde{F},f,\tilde{O}_1)$ 所确定. 用弧 $\tilde{\sigma}$ 把 $\tilde{O}$ 和 $\tilde{O}_1$ 相连接，它的投影是闭曲线 $\sigma$. 于是，$F$ 上给定的闭曲线

$\gamma_1$ 确定一条从 $\tilde{O}_1$ 出发的闭曲线当且仅当 $\sigma\gamma_1\sigma^{-1}$ 确定一条从 $\tilde{O}$ 出发的闭曲线. 由此可得 $\mathscr{D}_1$ 是由所有关于 $\gamma\in\mathscr{D}$ 的同伦类 $\sigma^{-1}\gamma\sigma$ 组成. 换言之, $\mathscr{D}_1$ 是 $\mathscr{D}$ 的共轭子群.

反之, 若 $\mathscr{D}_1=\sigma^{-1}\mathscr{D}\sigma$, 则 $\mathscr{D}_1$ 对应于曲面元 $(\tilde{F},f,\tilde{O}_1)$. 其中 $O_1$ 是从 $\tilde{O}$ 出发沿 $\sigma$ 的提升的终点.

对覆盖曲面元 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 和 $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)$, 如果存在将 $\tilde{F}_1$ 映上 $\tilde{F}_2$ 的拓扑映照 $\varphi$ 使得 $\tilde{F}_2\circ\varphi=\tilde{F}_1$, 且 $\varphi(\tilde{O}_1)=\varphi(\tilde{O}_2)$, 则将两曲面元视为恒同. 这种恒同化是合理的, 因为定义显然是利用等价关系. 注意到映照 $\varphi$ 是唯一确定的. 事实上, 若有具有同样性质的映照 $\psi$, 则由 $\tilde{F}_2\circ\varphi=\tilde{F}_2\circ\psi$ 和光滑覆盖面的定义可以知道: 使得关系 $\varphi(p)=\psi(p)$ 成立的集和使得关系 $\varphi(p)\neq\psi(p)$ 成立的集都是开的. 因此可知 $\varphi(\tilde{O}_1)=\psi(\tilde{O}_1)$ 蕴含着 $\varphi=\psi$.

**定理 1**　上面引进的构造定义了恒同化后的曲面元全体和 $\mathscr{F}_0(F)$ 的子群 $\mathscr{D}$ 之间的一一对应. 两个曲面元可用一个 $(\tilde{F},f)$ 来表示当且仅当对应的子群是共轭的.

**证**　由上述构造过程可知被恒同的曲面元决定同样的子群. 反之, 设 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 和 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 确定同一个 $\mathscr{D}$, 要证明它们可被恒同. 先构造映照 $\varphi$. 对任一点 $\tilde{p}\in\tilde{F}$, 用弧连接 $\tilde{O}$ 与 $\tilde{p}$, 记它在 $F$ 上的投影为 $\sigma$. 由此确定了 $\tilde{F}_1$ 上一条从 $\tilde{O}_1$ 出发沿 $\sigma$ 的提升, 它的终点记为 $\varphi(\tilde{p})$. $\varphi(\tilde{p})$ 与 $\tilde{O}$ 的选择无关. 事实上, 若 $\tilde{\sigma}$ 和 $\tilde{\sigma}'$ 都是从 $\tilde{O}$ 导向 $\tilde{p}$, 则 $\sigma\sigma'^{-1}\in\mathscr{D}$. 因此在 $\tilde{F}_1$ 上沿 $\sigma$ 和 $\sigma'$ 的提升必导向同一点. 易看出 $\varphi$ 是个同胚, 且 $f_1\circ\varphi=f$. 因此 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 和 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 可视为恒同.

本定理第二部分的证明在本段前几自然段已给出, 但还必须证明对应于每个子群必存在覆盖面元. 下面给出其直接构造.

## 2.　子群对应的覆盖面

设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{F}_0(F)$ 的一个子群. 对每一条从 $O$ 到 $p$ 的弧, 将其

想象作一个点 $\tilde{p}$. 对于两条弧 $\gamma_1$、$\gamma_2$，其对应点 $\tilde{p}_1$、$\tilde{p}_2$ 被粘合当且仅当 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 导致同一点 $p$ 而且 $\gamma_1\gamma_2^{-1}\in\mathscr{D}$. 这样的粘合显然是合理的. 粘合后的点族仍记为 $\tilde{p}$，它构成 $\tilde{F}$ 的点.

为构造 $\tilde{F}$ 的拓扑，考虑 Jordan 区域 $V\subset F$，并设 $\gamma$ 是从 $O$ 导至点 $p\in V$. 构造集 $\gamma\tilde{V}$，它由对应于弧 $\gamma\sigma$ 的所有点组成，其中 $\sigma$ 包含在 $V$ 中. 由于 $V$ 是单连通的，所以 $\tilde{q}\in\gamma\tilde{V}$ 和 $q\in F$ 两点之间的对应是一对一的. 选取集族 $\{\gamma\tilde{V}\}$ 做为 $\tilde{F}$ 的开集基.

必须证明 $\{\gamma\tilde{V}\}$ 满足基的公设. 设 $\gamma_1\tilde{V}_1$ 和 $\gamma_2\tilde{V}_2$ 相交，那么 $V_1$ 和 $V_2$ 必相交且 $V_1\cap V_2$ 是一些 Jordan 区域 $V$ 的并集. 只要考虑到 $\tilde{q}\in(\gamma_1\tilde{V}_1)\cap(\gamma_2\tilde{V}_2)$ 对应于 $q\in V\subset V_1\cap V_2$ 便可知，$\tilde{q}$ 可以由 $\gamma_1\sigma_1$ 和 $\gamma_2\sigma_2$ 来决定，其中 $\sigma_1\subset V_1$、$\sigma_2\subset V_2$. 可看出集 $\gamma_1\sigma_1\tilde{V}$ 和 $\gamma_2\sigma_2\tilde{V}$ 被粘合且包含在 $\gamma_1\tilde{V}_1\cap\gamma_2\tilde{V}_2$ 中. 因此，此交集是集 $\gamma\tilde{V}$ 的并. 从而基的公设被满足.

若 $\tilde{p}_1$、$\tilde{p}_2$ 对应于不同的 $p_1$、$p_2$，可以由选择不交的 $V_1$、$V_2$ 而找到不交的开邻域 $\gamma_1\tilde{V}_1$、$\gamma_2\tilde{V}_2$. 如果 $p_1=p_2$，设 $p_1$、$p_2$ 是由 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 所定，其中 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ 不在 $\mathscr{D}$ 内. 对任意包含 $p_1=p_2$ 的邻域 $V$，集 $\gamma_1\tilde{V}_1$、$\gamma_2\tilde{V}_2$ 是不交的. 因为 $\gamma_1\sigma(\gamma_2\sigma)^{-1}=\gamma_1(\sigma\sigma^{-1})\gamma_2^{-1}$ 同伦于 $\gamma_1\gamma_2^{-1}$，所以已经证明了 $\tilde{F}$ 是 Hausdorff 空间，且它显然是连通的.

置 $f(\tilde{p})=p$. 集 $\gamma\tilde{V}$ 被拓扑映上 $V$. 这证明了 $(\tilde{F},f)$ 是 $F$ 的光滑覆盖. 为证明它是正则的，只须要考虑从 $O$ 出发的弧 $\gamma$. 若 $\gamma$ 的表达式是 $p=\omega(t)$，可以定义 $\tilde{\omega}(t)$ 为由对应于 $[0,t]$ 的子弧所确定的点. 这是从起点 $\tilde{O}$ 出发由单位曲线 1 所决定的提升.

现在已清楚 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 对应于子群 $\mathscr{D}$. 事实上，沿 $\gamma$ 从 $\tilde{O}$ 出发的提升是闭的当且仅当 $\gamma\in\mathscr{D}$. ▌

### 3. 子群与其对应的覆盖面之基本群的同构

**定理 2** 对应于子群 $\mathscr{D}\subset\mathscr{F}_O(F)$ 所构造出的覆盖面 $\tilde{F}$ 的基本群与 $\mathscr{D}$ 同构.

**证** 从 $\tilde{O}$ 出发的闭曲线的投影属于 $\mathscr{D}$. 同伦的曲线有同伦的投影且为保积的. 这说明了投影映照把 $\mathscr{F}_0(\tilde{F})$ 同态映入 $\mathscr{D}$. 这映照是映上的, 因为任一 $\gamma\in\mathscr{D}$ 上都盖有曲线 $\tilde{\gamma}$. 最后根据单值性定理, $\gamma\approx 1$ 蕴含着 $\tilde{\gamma}\approx 1$, 所以映照是同构的. ▌

## 4. 偏序

设 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 和 $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)$ 是 $(F,O)$ 的两个覆盖元, 规定顺序如下: $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)$ 比 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 强当且仅当 $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)$ 覆盖 $(\tilde{F}_1,\tilde{O}_1)$ 并存在映照 $f$ 使得 $f_2=f_1\circ f$. 将上述顺序记作

$$(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)\geqslant(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1).$$

显然这一关系是可传的, 因此是覆盖面元间的一个偏序, 从而覆盖面元全体所成之集成一偏序集.

**定理 3** $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)\geqslant(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 当且仅当 $\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$, 其中 $\mathscr{D}_1$ 和 $\mathscr{D}_2$ 分别是对应于 $(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$ 和 $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)$ 的 $\mathscr{F}_0(F)$ 的子群.

**证** 设 $(\tilde{F}_2,f_2,\tilde{O}_2)\geqslant(\tilde{F}_1,f_1,\tilde{O}_1)$, 且 $f$ 是适合这一关系的映照. 对任一 $\gamma\in\mathscr{D}_2$, 在 $\tilde{F}_2$ 上存在对应着从 $\tilde{O}_2$ 出发的闭曲线 $\tilde{\gamma}_2$, 它被 $f$ 投影到 $\tilde{F}_1$ 上的闭曲线 $\tilde{\gamma}_1$, 而 $\tilde{\gamma}_1$ 在 $f_1$ 的投影下与 $\gamma$ 重合. 因此 $\gamma\in\mathscr{D}_1$, 从而 $\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$.

假设 $\mathscr{D}_2\subset\mathscr{D}_1$. 对任一给定 $\tilde{p}_2\in\tilde{F}_2$, 用 $\tilde{\sigma}_2$ 连接 $\tilde{O}_2$ 与 $\tilde{p}_2$. 由此决定了投影 $\sigma=f_2(\tilde{\sigma}_2)$, 且在 $\tilde{F}_2$ 上构造了从 $\tilde{O}_1$ 出发沿 $\sigma$ 的提升 $\tilde{\sigma}_1$. 从假设得 $\tilde{\sigma}_1$ 的终点 $f(\tilde{p}_2)$ 仅依赖于 $\tilde{p}_2$. 映照 $f$ 即为所需. ▌

由定理 1 和定理 3 可知关系"$\geqslant$"所确定的偏序与覆盖面元恒同化的概念在下述意义下是相容的. 在这意义下, 两个覆盖面元相互之间都强于另一个当且仅当它们可恒同.

### 5. 万有覆盖面

对于 $\mathscr{F}_0(F)$ 的两个子群，存在着被二者都包含的最大子群以及包含它们的最小子群. 根据定理 2，这对覆盖面也适合. 即对任意两正则覆盖面存在弱于二者的最强者以及存在强于二者的最弱者. 具有这一性质的偏序集称为网格.

正则覆盖面元所成之族的网格中有最强和最弱的元素. 注意到 $(F,O)$ 的最弱覆盖面是 $(F,e,O)$，其中 $e$ 为恒同映照，其对应的子群为 $\mathscr{D}=\mathscr{F}_0(F)$. 最强的覆盖对应于子群 $\mathscr{D}=\{1\}$，即由单位元组成的子群，它称为 $F$ 的万有覆盖面，记为 $\tilde{F}_\infty$.

**定理 4**　万有覆盖面是单连通的.

### 6. 正则覆盖面的覆盖变换

正则覆盖面 $(\tilde{F},f)$ 的覆盖变换是把 $\tilde{F}$ 映上自己的一个拓扑变换，它使得对应点在 $F$ 上有同样的投影. 覆盖变换形成一个群.

覆盖变换群与子群 $\mathscr{D}$ 紧密相联系. 使 $\sigma\mathscr{D}\sigma^{-1}=\mathscr{D}$ 成立的 $\mathscr{F}_0(F)$ 中元素 $\sigma$ 形成群 $\mathscr{M}$. 而在 $\mathscr{M}$ 中 $\mathscr{D}$ 是正规子群. $\mathscr{M}$ 称为 $\mathscr{D}$ 的正规化子群.

**定理 5**　$\tilde{F}$ 的覆盖变换群与商群 $\mathscr{M}/\mathscr{D}$ 同构，其中 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{D}$ 在基本群 $\mathscr{F}(F)$ 中的正规化子群.

**证**　选择固定原点 $O$、$\tilde{O}$. 设 $\sigma$ 是 $\mathscr{F}_0(F)$ 的元素，并考虑从 $\tilde{O}$ 出发的提升 $\tilde{\sigma}$ 的终点 $\tilde{O}_1$. 对应于 $(\tilde{F},f,\tilde{O}_1)$ 的子群 $\mathscr{D}_1$ 是 $\sigma^{-1}\mathscr{D}\sigma$. 若 $\sigma$ 属于正规化子群，则 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}$，且根据定理 1，覆盖面元 $(\tilde{F},f,\tilde{O}_1)$ 和 $(\tilde{F},f,\tilde{O})$ 被恒同. 这意味着存在唯一的覆盖变换 $T_\sigma$ 把 $\tilde{O}$ 映成 $\tilde{O}_1$. 显然 $T_{\sigma\tau}=T_\sigma T_\tau$. 因此已构造一个把 $\mathscr{M}$ 映入覆盖变换子群的同态变换.

$T_\sigma$ 是恒同变换当且仅当 $\tilde{O}=\tilde{O}_1$. 显然，当 $\sigma\in\mathscr{D}$，$T_\sigma$ 是恒同变换. 因此 $\mathscr{D}$ 是同态核，而商群 $\mathscr{M}/\mathscr{D}$ 被同构映入.

为证明映照是映上的，设 $T$ 是覆盖变换且置 $\tilde{O}_1=T(\tilde{O})$. 用投影为 $\sigma$ 的弧 $\tilde{\sigma}$ 把 $\tilde{O}$ 和 $\tilde{O}_1$ 连接起来. 对应于 $(\tilde{F},f,\tilde{O}_1)$的子群 $\mathscr{D}_1$ 是 $\sigma^{-1}\mathscr{D}\sigma$. 根据定理 1，$\mathscr{D}_1=\mathscr{D}$. 因此 $\sigma\in\mathscr{M}_1$，而且 $T=T_\sigma$. ▎

## 7. 正规覆盖面

如果 $\mathscr{D}$ 是正规子群，那么定理就特别简单. 因为此时

$$\mathscr{M}=\mathscr{F}(F).$$

对应于正规子群的正则覆盖面称为<u>正规覆盖面</u>. 直观地说，覆盖面是正规的，如果具有相同投影的点不能以覆盖性质相互区别. 例如，如果存在一条覆盖在 $\sigma$ 上的闭曲线 $\tilde{\sigma}$，那么所有覆盖在 $\sigma$ 上的曲线都是闭的.

特别，万有覆盖面 $\tilde{F}_\infty$ 是正规的，且它的覆盖变换群与基本群 $\mathscr{F}(F)$ 是同构的.

注意到没有一个覆盖变换而恰恰只有恒同变换才有不动点. 事实上，不动点可被选为原点，而只要注意到一个把 $\tilde{O}$ 映入自己的覆盖变换是恒同的.

在正规覆盖面的情况下，总存在一个覆盖变换把一个给定的点 $\tilde{p}$ 映入有同样投影的预先指定的点 $\tilde{p}_1$. 因为如果取

$$\tilde{O}=\tilde{p}、\quad \tilde{O}_1=\tilde{p}_1,$$

那么 $\sigma$ 总是属于正规化子群且 $T_\sigma(\tilde{O})=\tilde{O}_1$.

## 8. 换位子群

群 $\mathscr{F}$ 的<u>换位子群</u>定义为包含所有可以写成形如 $aba^{-1}b^{-1}$ 的元素的最小子群. 其中 $a$、$b\in\mathscr{F}$. 换位子群常记作 $\mathscr{F}^{(1)}$，它是一正规子群. 因为若 $d\in\mathscr{F}^{(1)}$，则 $cdc^{-1}=(cdc^{-1}d^{-1})d$ 也属于 $\mathscr{F}^{(1)}$.

由于 $ab(ba)^{-1}=aba^{-1}b^{-1}\in\mathscr{F}^{(1)}$，所以 $ab$ 和 $ba$ 属于 $\mathscr{F}^{(1)}$ 的

同一个陪集，从而商群 $\mathscr{F}/\mathscr{F}^{(1)}$ 是 Abel 群.

设 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{F}$ 的使 $\mathscr{F}/\mathscr{D}$ 是 Abel 群的任一正规子群，则形如 $aba^{-1}b^{-1}$ 的每个元素都属于 $\mathscr{D}$，因此 $\mathscr{F}^{(1)}\subset\mathscr{D}$. 得出 $\mathscr{F}^{(1)}$ 是使商群 $\mathscr{F}/\mathscr{D}$ 为 Abel 群的最小群.

若把上述结果用到曲面的基本群 $\mathscr{F}:=\mathscr{F}(F)$，则换位子群 $\mathscr{F}^{(1)}(F)$ 决定一个正规覆盖面 $\tilde{F}_{hom}$，称之为同调覆盖面. 它有一个覆盖变换的 Abel 群，且是具有此性质的最强正规覆盖面.

商群 Hom $F:=\mathscr{F}(F)/\mathscr{F}^{(1)}(F)$ 称为 $F$ 的同调群，它同构于 $\tilde{F}_{hom}$ 的覆盖变换群.

## 9. 分支覆盖映照的局部性质

先考虑支点邻域的子群. 设$(\tilde{F},f)$是 $F$ 的覆盖，而 $\Delta$ 是 $F$ 的一个 Jordan 区域. 对 $p_0\in F$，记 $\Delta_0=\Delta\backslash p_0$. 根据 §1 定理 5，$\Delta_0$ 的基本群是无限循环群. 记其生成元为 $\alpha$. 又设 $\tilde{p}_0\in\tilde{F}$ 使得 $f(\tilde{p}_0)=p_0$，而且 $f^{-1}(\Delta)$ 的包含 $\tilde{p}_0$ 的分支 $\tilde{\Delta}$ 是相对紧致的. 记 $\tilde{\Delta}_0=\tilde{\Delta}\backslash\tilde{p}_0$. 由定理 1，基本群 $\mathscr{F}(\tilde{\Delta}_0)$ 同构于 $\mathscr{F}(\Delta_0)$ 的某个子群 $\mathscr{D}$.

$\mathscr{F}(\Delta_0)$ 的子群是由幂 $\alpha^m$ 产生的，其中 $m\geqslant 0$. 假设 $m=0$，则子群退缩为单位元素. 若 $\mathscr{D}$ 是这个子群，则 $\tilde{\Delta}_0$ 是 $\Delta_0$ 的万有覆盖面，它必有无限多个覆盖变换，因而必存在无限多个有同一投影的点. 这与 $\tilde{\Delta}$ 在 $\tilde{F}$ 中是相对紧的这一事实矛盾. 故 $m>0$.

发现 $\mathscr{D}$ 是由所有 $\alpha^{mn}$ 组成，其中 $m\geqslant 1$，$n$ 取遍所有整数，所以 $\mathscr{F}(\tilde{\Delta}_0)$ 是无限循环的，而且 $\tilde{\Delta}_0$ 的覆盖变换形成 $m$ 阶有限循环群.

数 $m$ 称为 $\tilde{p}_0$ 的重数，且若 $m>1$，说 $\tilde{p}_0$ 是 $m-1$ 阶支点. 显然支点是孤立的.

现在讨论覆盖映照的局部性质. 设 $\tilde{p}_0\in\tilde{F}$ 的重数为 $m$. 考虑映照 $\zeta=z^m$，它定义圆盘 $\{z\,|\,|z|<1\}$ 作为圆盘 $E:=\{\zeta\,|\,|\zeta|<1\}$ 的覆盖面，且在原点的重数为 $m$. 设 $\omega$ 是把 $\Delta$ 映上 $E$ 的同胚，它

将 $p_0$ 映为 0，故使 $\Delta_0$ 对应于 $E_0:=\{\zeta|0<|\zeta|<1\}$. 则 $(\tilde{\Delta}_0,\omega\circ f)$ 是 $E_0$ 的正则覆盖，它确定了与映照 $\zeta=z^m$ 所确定的相同的子群 $\mathscr{D}$. 根据定理 1，存在将 $\tilde{\Delta}_0$ 映上 $E$ 的同胚映照 $\varphi$ 使得对应点有同样的投影. 这一条件写作

$$\omega(f(\tilde{p}))=\varphi(\tilde{p})^m. \tag{1}$$

换言之，若设 $\omega(p)=\zeta$，$\varphi(\tilde{p})=z$，那么对应是由 $\zeta=z^m$ 给出.

由于 $\omega\circ f$ 在 $\tilde{p}_0$ 连续且 $\omega(f(\tilde{p}_0))=0$，则从上式得出当 $\tilde{p}\to\tilde{p}_0$ 时，$\varphi(\tilde{p})$ 趋向于 0. 故 $\varphi$ 可以被延拓成将 $\tilde{\Delta}$ 映上圆盘 $E$ 的同胚.

满足式(1)的同胚 $\omega$ 和 $\varphi$ 的存在性，是关于映照 $f$ 具有与映照 $\zeta=z^m$ 相同的局部性质这一结论的精确表达. 由于后一映照的初等的，因而 $f$ 的局部性质是清楚的（即每点 $p$ 有邻域被对应覆盖面上的邻域覆盖同样 $m$ 次）.

顺便指出，现已证明了 $\tilde{F}$ 是曲面，因为 $\tilde{\Delta}$ 是 $\tilde{p}_0$ 的一个开邻域，它同胚于圆盘.

### 10.　覆盖面的定向

**定理 6**　每个可定向曲面的覆盖面是可定向的.

**证**　对于 $F$ 上的每个区域 $\Delta$，选取同胚 $\omega$ 使得它的定向与曲面 $F$ 的定向一致. 对于 $\tilde{\Delta}$，考虑第 9 段中的同胚 $\varphi:\tilde{p}\to z$. 记映照 $\pi(z)=z^m$ 因此，式 (1)可写作 $\omega\circ f=\pi\circ\varphi$. 除去在 $z=0$ 处，$\pi$ 的度数是 1.

全体集 $\tilde{\Delta}$ 形成 $\tilde{F}$ 的一个开覆盖. 必须证明 $\varphi_1$、$\varphi_2$ 定义了 $\tilde{\Delta}_1$、$\tilde{\Delta}_2$ 的相容定向. 只要考虑非支点 $q\in\tilde{\Delta}_1\cap\tilde{\Delta}_2$ 的情形. 设 $\tilde{U}\subset\tilde{\Delta}_1\cap\tilde{\Delta}_2$ 是 $\tilde{q}$ 的邻域，它如此小使得当限制在 $\pi_1(\varphi_1(\tilde{U}))$ 时，$\pi_1$ 是可逆的. 从 $\omega_1\circ f=\pi_1\circ\varphi_1$、$\omega_2\circ f=\pi_2\circ\varphi_2$，得到 $\omega_1^{-1}\circ\pi\circ\varphi_1=\omega_2^{-1}\circ\pi\circ\varphi_2$. 因此在 $\varphi_2(\tilde{U})$ 上 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}=\pi_1^{-1}\circ(\omega_1\circ\omega_2^{-1})\circ\pi_2$. 映照 $\pi_1^{-1}$、$\omega_1\circ\omega_2^{-1}$ 和 $\pi_2$ 在 $\varphi_2(\tilde{U})$ 中都有度数 1. 因此 $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ 有度数 1. 定向是相容的.

# 第三章

# Riemann 曲面

## §1 Riemann 曲面的概念

### 1. Riemann 曲面的定义

尽管从第一章曲面的概念出发可得 Riemann 曲面的概念，但这里重新给予定义.

设 $R$ 是一连通 Hausdorff 空间. 若 $R$ 中的每一点 $p$ 都有一邻域 $U_p$ 与复平面的一个开圆盘 $U_z$ 同胚，则称 $R$ 为二维流形或曲面. 其中 $U_p$ 称为 $p$ 点的参数邻域；它在复平面上的象 $U_z$ 称为参数圆；拓朴映照 $h: U_p \to U_z$ 称为参数映照；$z=h(p)$ 称为 $p$ 的局部参数. 对二点 $p、q\in R$，若 $D:=U_p\cap U_q\neq\varnothing$，则称其参数邻域是相邻的. 设 $h_p、h_q$ 分别为 $p、q$ 的局部参数. 记 $D_p=h_p(D)$，$D_q=h_q(D)$，于是 $h_{pq}:=h_p\circ h_q^{-1}$ 是将 $D_q$ 映为 $D_p$ 的一个拓扑映照，称为 $U_p$ 和 $U_q$ 的相邻关系.

**定义 1** 具有直接保角相邻关系的二维流形称为 Riemann 曲面.

紧致的 Riemann 曲面称为闭 Riemann 曲面，非紧致的 Riemann 曲面称为开 Riemann 曲面.

Riemann 曲面是可定向曲面，且具有可数拓扑基，后者将在

§3.8 中给出证明.

下面给出几个 Riemann 曲面的例子.

**例 1** 延拓的复平面 $K:=\{z\,|\,|z|\leqslant\infty\}$ 是一 Riemann 曲面. 可选区域 $\{z\,|\,|z|>\rho\}(\rho>0)$ 为其 $\infty$ 点处的参数邻域. 对应的参数映照为 $h_\infty=\frac{1}{z}$; 而其余点处的参数映照取为恒同映照 $h_1=z$, 则相邻关系为 $h_{\infty 1}=\frac{1}{z}$.

**例 2** 对自然数 $n\ (\geqslant 2)$, 函数 $w=z^n$ 的反函数 $z=\sqrt[n]{w}$ 是 $n$(多)值函数. 置 $w=\rho e^{i\varphi}$. 把每个 $w\neq 0$ 的复数用 $n$ 个不同的幅角来表示, 看成 $n$ 个"不同的"复数, 就可以将 $z=\sqrt[n]{w}$ 表示成一个单值函数. 具体做法如下: 假定把 $2(k-1)\pi\leqslant\varphi<2k\pi\ (k=1,2,\cdots,n)$ 所对应的 $w$ 看成为不同复数 $w_k$; 但是, 对于任意整数 $j$, 把 $2(jn+k-1)\pi\leqslant\varphi<2(jn+k)\pi$ 与 $2(k-1)\pi\leqslant\varphi<2k\pi$ 所对应的 $w$ 看成是相同的. 这相当于把通常的 $w$-平面看成由 $n$ 个 $w$-平面组成: 把 $n$ 个 $w$-平面都沿正实轴裂开, 然后把第一个平面的裂缝的上岸与第二个平面的裂缝的下岸相粘合 (今后将此粘合方法称为对接); 设第 $k(k<n)$ 个平面的裂缝的下岸已粘好, 现将第 $k$ 个平面的裂缝的上岸与第 $k+1$ 个平面的裂缝的下岸粘合; 最后把第 $n$ 个平面的上岸与第一个平面的裂缝下岸粘合. 经过上述的粘合手续得到一 Riemann 曲面 $F$. 那么 $z=\sqrt[n]{w}$ 在下述意义下可以看作 $F$ 上的单值函数: 将 $F$ 看作 $w$-复平面的 $n$-叶覆盖面, 用 $p$ 表示 $F$ 上的点; 对于每个复数 $w\neq 0$, 将 $F$ 覆盖在 $w$ 上的且位于第 $k$ 叶的点记为 $p_k$, 它即为对应于上述 $w_k$ 的点; 现在将 $\sqrt[n]{w}$ 的(不同的) $n$ 个值分别看作对应于 $p_k$ 的函数值, 那么 $z=\sqrt[n]{w}$ 自然是一 $F$ 上的单值函数.

注意到, 曲面 $F$ 上对应于 $w=0$ 的点 $p_0$ 的参数邻域是取作对应于 $\{w\,|\,|w|<\rho\}$ 的 $n$ 叶(连通)覆盖部分 $U_{p_0}$, 其对应的参数映照

为 $\zeta=h_0(p)=\sqrt[n]{p}$，而参数圆为 $\{\zeta\,|\,|\zeta|<\sqrt[n]{\rho}\}$. 曲面 $F$ 上其它点的参数映照可取为 $\zeta=h_1(p)=p$. 那么它们具有解析的相邻关系：$h_{10}=h_1\circ h_0^{-1}(\zeta)=\zeta^n$. 此时称 $p_0$ 为曲面 $F$ 的$n-1$阶支点.

**例** 3　(Mybreg, P. J.) 取两个复平面 $\{z\,|\,|z|<\infty\}$. 设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实轴上的(严格)单调增加的点列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. 现将两个复平面都沿线段 $[a_{2n-1}, a_{2n}]$ 裂开（对所有的 $n$），所的两个裂缝平面分别记为 $P_1$、$P_2$. 将 $P_1$ 和 $P_2$ 沿裂缝对接起来，即得到一个开 Riemann 曲面，记为 $\Phi_1$. 在 $P_1$ 上半平面内挖去一个闭圆盘，所得的裂缝平面记为 $P_1'$，再把 $P_1'$ 和 $P_2$ 沿裂缝对接起来，即得到一个开 Riemann 曲面，记为 $\Phi_2$.

**例** 4　设 $w=f(p)$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的半纯函数(参看定义 5、6)，作为映照，其逆映照末必是单值的. 但对于任一点 $p\in R$ 有下面两种情形：

1) 存在一参数邻域 $U$ 使 $f$ 在其上的限制 $f|_U$ 是单价的；

2) $f$ 在任一参数邻域 $U$ 上的限制 $f|_U$ 都不是单价的.

记满足条件 1)的点全体为 $R_1$，并置

$$F_1=\{(p,f(p))\,|\,p\in R_1\}.$$

于是映照 $\varphi: R_1\to F_1$，$p\mapsto(p,f(p))$ 是一对一的，而映照 $h: F_1\to K$，$(p,f(p))\mapsto f(p)$ 是一投影. 现定义 $F_1$ 的开集如下：$W$ 是 $F_1$ 的开集当且仅当 $\varphi^{-1}(W)$ 是 $R_1$ 的开集. 则显然 $\varphi$ 是共形映照，而 $F_1$ 是 $K$ 的一光滑覆盖面.

对于情形 2)中的孤立点，若存在一参数邻域使得 $f$ 有表达式 $w=z^n$，则参照例 2 进行讨论，此时可在 $F_1$ 上加上一点使其仍成为曲面，且该点必为该曲面上的支点. 假设按此方法将所有可补上的点都已补上，则所得的曲面 $F$ 称为由半纯函数 $f$ 所产生的覆盖在 $w$-球面 $K$ 上的 Riemann 曲面.

由于任一 Riemann 曲面 $R$ 上都存在半纯函数(参看第五章

§4.4)，故根据例 4，$R$ 总可以看作复球面的覆盖面. 另一方面，本书所讨论的有关函数类及其相关运算在共形映照下是不变的. 所以常将 $R$ 中的点 $p$ 直接用复球面的变量 $z$、$w$ 等来代替. 例如函数 $f(p)$ 直接写成 $f(z)$. 今后不再另行说明.

## 2. Riemann 曲面的子区域

**定义 2** Riemann 曲面上的一维流形称为解析子流形. 它的每个分支称为解析曲线.

对应于第一章 §3 中的概念，开线段 (0,1) 在 Riemann 曲面上的解析同胚象(参看定义 6)是解析曲线 (或解析弧)；而单位圆周在 Riemann 曲面上的解析同胚象又称为解析 Jordan 曲线.

**定义 3** 若曲面 $R$ 的子区域 $G$ 与它外部有相同的边界 $\partial G$，且 $\partial G$ 是 $F$ 的一维子流形，则说 $G$ 正则嵌入曲面 $R$. 若 $G$ 具有紧闭包，且其余集的各分支都是非紧致的，则称 $G$ 为 $F$ 的正则(子)区域.

Riemann 曲面的正则子区域的边界必为解析曲线.

考虑 Riemann 曲面 $R$ 的子区域 $G$，若 $G$ 的边界 $\Gamma$ 由最多可数条解析 Jordan 曲线或解析 Jordan 弧组成，且它们不聚集于 $R$ 上的任一点，则称之为 $R$ 的好子域. 好子域的概念将在 Riemann 曲面的分类理论中用到.

## 3. 镶边 Riemann 曲面

只须对 Riemann 曲面的定义给予适当的变动即可得镶边 Riemann 曲面的定义.

**定义 4** 设 $\bar{R}$ 是非曲面的连通 Hausdorff 空间，若 $\bar{R}$ 上的每一点 $p$ 都有邻域 $U_i$ 与闭上半平面的一个相对开集 $V_i$ 同胚，则称 $\bar{R}$ 是镶边曲面. 若它们的相邻关系都是解析的，则称 $\bar{R}$ 为

镶边 Riemann 曲面.

注意到，若 $p\in\overline{R}$，且有开邻域 $U$，使与其在闭上半平面 $\overline{H}$ 的同胚象 $V_z$ 是同由 $\overline{H}$ 的内点组成，则 $p$ 的每个开邻域必有相同性质. 将具有这种性质的点的全体记为 $R$，并记 $\partial R=\overline{R}\backslash R$. 易知 $R$ 和 $\partial R$ 总可被分别映入开上半平面和实轴. 称 $R$ 为 $\overline{R}$ 的内部，显然 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 称 $\partial R$ 为 $\overline{R}$ 的边界；而 $\partial R$ 的分支称为围道. 显然，$\partial R$ 是一维流形，而每个紧围道必为 Jordan 曲线. 若 $\partial R$ 由有限条紧致的解析 Jordan 曲线组成，则 $R\cup\partial R=\overline{R}$ 有时称为 Heins 意义下的素端，简称为端.

镶边 Riemann 曲面也是具有可数拓扑基且为可定向的.

设 $G$ 是镶边 Riemann 曲面 $R\cup\partial R$ 的子区域，若其边界 $\partial G$ 与 $\partial R$ 不交，且 $G$ 是 $R$ 的好子域，则称 $G$ 是 $R\cup\partial R$ 的好子域. 显然，可将 $G\cup\partial G$ 看作是镶边 Riemann 曲面. 其理想边界 $\beta_G$ 称为 $G$ 的关于 $R$ 的相对理想边界.

### 4. 镶边曲面的双倍面

设 $R\cup\partial R$ 是一镶边 Riemann 曲面，此处包括 $\partial R=\varnothing$ 的情形，即通常的开 Riemann 曲面. 将 $R\cup\partial R$ 的复制品记为 $R^*\cup\partial R^*$，其中点 $p\in R\cup\partial R$ 对应于点 $p^*\in R^*\cup\partial R^*$. 若点 $p$ 的参数映照是 $h_p$，则将点 $p^*$ 的参数映照取为 $h_p^*=-\bar{h}_p$.

下面证明 $R^*\cup\partial R^*$ 的相邻关系 $h_1^*\circ h_2^{*-1}$ 是解析的. 事实上，若设它所对应的 $R\cup\partial R$ 的相邻关系为 $\varphi_{12}:=h_1\circ h_2^{-1}$，则 $h_1^*\circ h_2^{*-1}$ 可表示为 $z\mapsto -\overline{\varphi}_{12}(-\bar{z})$，这是直接保角的.

上面证明 $R^*\cup\partial R^*$ 是一镶边 Riemann 曲面，称为由 $R\cup\partial R$ 对称复制而成的共轭曲面或对称曲面.

对镶边 Riemann 曲面($\partial R\neq\varnothing$)的情形，将 $R\cup\partial R$ 和 $R^*\cup\partial R^*$ 沿边界粘合，就是将 $\partial R$ 的每一点 $p$ 与其对应于点 $p^*\in\partial R^*$ 粘合. 容易验证，由此获得一 Riemann 曲面，称为 $R$ 关于 $\partial R$ 的

Schottky 双倍(面)，并记为 $\hat{R}$. 特别指出，Schottky 双倍 $\hat{R}$ 上必存在一映上自身的且使 $\partial R$ 保持不变的直接共形映照.

### 5. Riemann 曲面的亏格

从拓扑学角度看，关于二维流形的经典结果说明：任何可定向的二维紧流形都同胚于一个具有若干环柄的球面，这些环柄的个数是基本的拓扑不变量，即为该流形的亏格.

Bochner[1]证明：任一具有有限亏格的开 Riemann 曲面总能被嵌入一紧 Riemann 曲面之中.

### 6. 解析映照

固定 Riemann 曲面 $R$ 上的一点 $p$，设 $U_p$ 是其参数邻域. 对任一点 $q\in U_p$，它在参数映照 $h_p$ 的参数值 $z=h_p(q)$ 是唯一确定的，即不同的 $z$ 确定不同的 $q$. 因此可以将 $z$ 称为局部参数. 有时为方便起见常直接用 $z$ 表示点 $p$，甚至直接写成 $z\in R$.

首先，利用平面解析函数的概念给出 Riemann 曲面上的相应的定义.

**定义 5** 设 $D$ 是 Riemann 曲面上的子区域，而 $w=f(p)$ 是定义在其上的复值函数. 若对每一点 $p\in D$，复合函数 $f\circ h^{-1}$ 在 $p$ 的参数圆 $U_z$ 上是解析的，则称 $f$ 是 $D$ 上的解析函数. 其中 $h: U_p\to U_z$ 是关于 $p$ 点的参数映照.

由于 Riemann 曲面 $R$ 的相邻关系是解析的，因此上面定义是合理的. 解析函数的定义是局部的且关于局部参数是不变的.

其次，给出关于两个 Riemann 曲面共形等价的概念，对应的定义如下：

**定义 6** 设 $\varphi: R_1\to R_2$，$p\mapsto q$ 是两个 Riemann 曲面间的连续映照. 将 $p$、$q$ 的参数映照分别记为 $h_p$、$h_q$. 如果函数 $h_q\circ\varphi\circ h_p^{-1}$ 在 $R_1$

的任一点 $p$ 的参数圆内都是解析的，则称映照 $\varphi$ 是解析的. 如果 $\varphi$ 还是一对一的，则两个 Riemann 曲面 $R_1$ 和 $R_2$ 称为共形等价的，$\varphi$ 称为共形映照或解析映照.

共形等价的定义显然是合理的. 而且还可知 $h_p\circ\varphi^{-1}\circ h_q^{-1}$ 是解析的、$\varphi^{-1}$ 是连续的.

在 Riemann 曲面上解析函数的导数是无意义的，因为它在相邻关系下的不变性不成立. 事实上，对于 $R$ 上的解析函数 $f(z)$，若设 $z_1$ 是它的另一个局部参数、且在这局部参数下 $f(z)$ 可表示成 $f_1(z_1)$；又设 $z$ 与 $z_1$ 对应的参数圆间的相邻关系为 $\psi$，则有

$$f(z)=f_1(\psi(z)).$$

由于相邻关系是解析的，故 $\frac{dz_1}{dz}\neq 0$，$\frac{dz}{dz_1}\neq 0$. 于是有

$$f'(z)=f_1'[\psi(z)]\psi'(z)=f_1'(z_1)\frac{dz_1}{dz}. \tag{1*}$$

虽然如此，但是从上式却可得

$$f'(z)dz=f'_1(z_1)dz_1,$$

即 $df_1=f'(z)dz$ 关于局部参数是不变的.

### 7. 共变量

为讨论与式(1*)相关的更为一般的变量，设函数 $f(z)$ 关于实坐标 $x$ 和 $y(z=x+iy)$ 具有二阶连续偏导. 记 $M_1=f_x$、$M_2=f_y$. 则 $f$ 的微分为

$$df=M_1dx+M_2dy.$$

对另一局部参数 $z^*=x^*+iy^*$，同样有 $df$ 的表达式

$$df=M_1^*dx^*+M_2^*dy^*,$$

其中

$$M_1^*=\frac{\partial x}{\partial x^*}M_1+\frac{\partial y}{\partial x^*}M_2,\quad M_2^*=\frac{\partial x}{\partial y^*}M_1+\frac{\partial y}{\partial y^*}M_2. \tag{2*}$$

**定义 7**　如果 Riemann 曲面 $R$ 上定义的数值偶$(M_1,M_2)$是由点 $p$ 及一确定的局部参数 $z$ 所确定，且经变换为另一局部参数时满足关系式(2*)，那么称该数偶为共变向量.

函数 $f$ 的导数 $f_x$、$f_y$ 所构成的共变向量称为该函数的梯度.

若 $R$ 的子区域的每一点都对应有一共变向量，则称之为共变向量场. 另，满足下面关系式的量 $M$ 称为共变量：

$$M^* = M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z^*}$$

共变向量场$(M_1,M_2)$对应有共形不变的微分式

$$\mathrm{d}f_z = M_1\mathrm{d}x + M_2\mathrm{d}y.$$

虽然共变量不是共形不变量(前者可称为相对共形不变量，而后者称为绝对共形不变量)，但是其微分式 $M\mathrm{d}z$ 是共形不变的. 两个共变量之商式也是共形不变的，其中该商式可能具有极点.

如果$(M_1,M_2)$的两个分量关于某一确定的局部参数 $z$ 满足关系 $M_2=iM_1$，那么由于相邻关系是解析的可知对任何局部参数该关系仍成立. 记 $M_1=M$，则有

$$M^* = M\left(\frac{\partial x}{\partial x^*} + \mathrm{i}\frac{\partial y}{\partial x^*}\right) = M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z^*}.$$

于是$(M_1,M_2)$的两个分量皆为共变量.

解析函数(对应地，半纯函数) $f$ 的导数 $f'$ 是一共变量，称为解析共变量(对应地，半纯共变量或Abel 共变量). 两个 Abel 共变量之商是一半纯函数.

另一方面，设 $u(z)$ 是定义在 $R$ 上的一次连续可微实函数，则 $u$ 的微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若记另一个局部参数为 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，则同样有

$$\mathrm{d}u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\mathrm{d}y_1.$$

但 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}$．　从而

$$\begin{aligned}du&=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\,dx+\frac{\partial x_1}{\partial y}\,dy\right)+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\,dx+\frac{\partial y_1}{\partial y}\,dy\right)\\&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\,dy_1=du_1\end{aligned}$$

### 8.　单位分解

首先，设 $\gamma$ 是 Riemann 曲面上的一条处于某一参数邻域 $U$ 中的可微弧，那么对共形不变的微分式 $a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y$，积分

$$\int_\gamma a\,\mathrm{d}x+b\,\mathrm{d}y$$

可看成 $z$-平面上的线积分，且它的值不依赖于局部参数的选择.

其次，若 $\gamma$ 是分段可微的，那么可将它分成具有上述性质的弧，然后定义其上的积分值为各段上积分值之和. 显然，这样的定义的积分也与局部参数的选择无关.

最后，为定义曲面上的积分，必须先介绍单位分解的概念. 单位分解就是一个非负连续函数族 $\{e_i\}$，使得每 $e_i$ 在某个参数邻域 $U_i$ 外恒为 0、$\sum e_i\equiv 1$，且 $\bigcup_i U_i$ 覆盖整个 Riemann 曲面.

下面仅对闭曲面或紧镶边曲面情形构造单位分解.

对于镶边曲面 $\bar{R}$，可以假定对每一点 $p\in\bar{R}$ 都有邻域 $U_p$ 或者与单位圆同胚或者与包含直径的半圆同胚. 显然，紧 Riemann 曲面或镶边 Riemann 曲面都有由上述类型的邻域组成的有限覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^n$. 记 $U_i$ 对应的参数映照为 $h_i$，在复平面上定义

$$g(z)=\begin{cases}(1-|z|^2)^3, & \text{当 } |z|<1,\\ 0, & \text{当 } |z|\geqslant 1.\end{cases}$$

容易验证 $g\in C^2(R)$. 对于 Riemann 曲面 $R$( 或镶边 Riemann 曲面

$\bar{R}$)，在其上定义

$$g_i(p) = \begin{cases} g \circ h_i(p), & \text{当 } p \in U_i, \\ 0, & \text{当 } p \,\overline{\in}\, U_i. \end{cases}$$

则 $g_i \in C^2(R)$( 或 $g_i \in C^2(\bar{R})$). 令

$$e_i(p) = g_i(p)\left(\sum_i g_i(p)\right)^{-1},$$

$\{e_i(p)\}_i$ 即为所需单位分解.

9. Dirichlet 积分

设 $u$ 是平面区域 $W$ 上的实值 $C^1$ 类函数，积分

$$D_W[u]:=\int_W \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

称为 $u$ 在区域 $W$ 上的积分. 其值为有限或 $+\infty$，且其值为 0 当且仅当 $u$ 是常数.

如果 $u、v \in C^1$，且 $D_W[u]$ 和 $D_W[v]$ 都是有限的，那么可以考虑混合 Dirichlet 积分

$$D_W[u,v]:=\int_W \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

上面两种 Dirichlet 积分在共形映照下都是不变的. 显然 $D_W[u]=D_W[u,u]$. 另外，由于

$$D_W[u+tv]=D_W[u]+2tD_W[u,v]+t^2D_W[v]$$

是正定二次型，故有重要不等式

$$D_W[u,v]^2 \leqslant D_W[u]D_W[v].$$

现在，设 $u$ 是 Riemann 曲面 $R$( 或镶边 Riemann 曲面 $\bar{R}$ )上的 $C^1$ 类函数，而 $f$ 是解析函数. 不难验证

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \quad \text{和} \quad |f'|^2$$

都是共变量，从而

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 和 \quad |f'|^2 g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

都是共形不变的，其中 $g$ 为 $R$（或 $\bar{R}$）上的连续函数. 因此，可以对 $R$（或 $\bar{R}$）上的区域 $W$ 定义<u>Dirichlet 积分</u>如下：

$$D_W[u]:=\int_W\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_W\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] e_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$D_W[f]:=\int_W|f'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y:=\sum_{i=1}^{n}\int_W|f'|^2 e_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这一定义是合理的，因为它不依赖于单位分解的选择. 事实上，若 $\{e_i'(p)\}_{i=1}^{n}$ 是另一单位分解，则

$$\sum_i\int_W\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] e_i\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i,j}\int_W\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] e_ie_j'\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_j\int_W\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] e_j'\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从定义不难得出，若 $f=u+iv$ 是 $W$ 上的解析函数，则由 Cauchy-Riemann 方程可得

$$D_W[f]=D_W[\mathbf{Re}\,f]=D_W[\mathbf{Im}\,f].$$

## 10. Green 公式

设 $W_0$ 是复上半平面 $\{z|z=x+iy,\ y\geqslant 0\}$，记 $B_0$ 为沿正方向取向的 $x$ 轴. 对于那些在一紧集外取值 0 的 $C^1$ 类函数 $u$ 显然有

$$\int_{W_0}\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\qquad \int_{W_0}\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{B_0}u\,\mathrm{d}x$$

设 $u$ 和 $v$ 分别是在一紧集外取值 0 的 $C^2$ 和 $C^1$ 类函数，如果

用 $v\frac{\partial u}{\partial x}$ 代替第一个公式中的 $u$、用 $v\frac{\partial u}{\partial y}$ 代入第二个公式，然后两式相加，那么可得

$$\int_{W_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{W_0}v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{B_0}v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$ 是 Laplace 算子. 如果 $\Delta u=0$，那么有

$$D_{W_0}[u,v]=-\int_{B_0}v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x.$$

如果用整个平面代替 $W_0$，用同样的方法可知混合 Dirichlet 积分为 0. 若已知 $v$ 在 $\{z\,|\,|z|\geqslant 1\}$ 为 0，则积分可以限制在单位圆盘或半圆盘，在后一情形 $B_0$ 以实直径替之.

现在，设 $u$、$v$ 分别是曲面镶边 Riemann 曲面 $R\cup\Gamma$ 上的 $C^2$ 类和 $C^1$ 类函数. 应用单位分解 $\{e_i\}$ 有

$$D_R[u,e_iv]+\int_R e_iv\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_\Gamma e_iv\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\nu$ 是沿正定向边界内法向. 由于混合 Dirichlet 积分是双线性的，因此全体 $D_R[u,e_iv]$ 的和是 $D_R[u,v]$，故有

$$D_R[u,v]+\int_R v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s.$$

特别当 $u$ 是调和函数时，

$$D_W[u,v]=-\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s.$$

这一关系称为Green 公式. 当然，Green 公式对紧 Riemann 曲面也成立，只是此时混合 Dirichlet 积分为 0. 如果 $u$、$v$ 都是 $R\cup\Gamma$ 上的调和函数，根据 Dirichlet 积分的对称性可得

$$\int_\Gamma\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\,\mathrm{d}s=0,$$

其中后者之微分是取自右法线方向. 特别当 $v\equiv 1$ 时，下面特殊形式的 Green 公式常被用到：

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial v}\,\mathrm{d}s=0.$$

## §2　调和函数与 Harnack 原理

### 1.　调和函数的定义

采用平均值的方法给出调和函数的定义，其优点是对函数的导数没有任何假设.

**定义 1**　设 $D$ 是 Riemann 曲面上的子区域，$u(z)$ 是定义在其上的实值连续函数. 若对任一点 $z_0\in D$，存在一足够小的正数 $\rho_0$ 使圆盘 $O(z_0,\rho_0)$ 包含于 $D$ 中，且

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\quad \forall\ \rho\in(0,\rho_0),\qquad (1^*)$$

则 $u(z)$ 称为 $D$ 内的调和函数.

定义中要求 $\rho_0$"足够小"，可理解为使所讨论的邻域限制在 $z_0$ 的参数邻域中，以便使有关概念归结为平面的情形. 其中积分理解为 Lebesgue 意义下的.

众所周知，解析函数满足平均值定理，从而其实部和虚部都满足定义 1 中的条件，故都是调和函数. 由于 Riemann 曲面子区域里的调和函数及解析函数的定义是局部的，因此，平面上的关于调和函数或解析函数的、只与局部性质有关的定理在 Riemann 曲面上同样成立.

**引理 1**　设 $f(z)$ 是定义在 $z$-平面的一有限区域 $D$ 上的解析函数，则对任一数 $p>0$，对任一 $z_0\in D$，存在一数 $\rho>0$ 使得

$$|f(z_0)|^p \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p \mathrm{d}\theta,\ \forall\, r \in [0,\rho). \qquad (2^*)$$

**证**　若 $f(z_0)=0$,则式$(2^*)$成立. 若 $f(z_0)\neq 0$,则在某闭圆盘 $\overline{O(z_0,\rho)}:=\{z \mid |z-z_0|\leqslant\rho\}$内 $f(z)\neq 0$. 如果 $\rho>0$ 足够小，那么在圆盘 $O(z_0,\rho)$内$(f(z))^p$是解析的(至少可取一单值分支). 因此

$$(f(z_0))^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(z_0 + re^{i\theta}))^p \mathrm{d}\theta, \quad \forall\, r \in [0,\rho).$$

故式$(2^*)$成立. ▌

**注**　满足式$(2^*)$的函数连续称为下调和函数，§3 将对此类函数进行详细讨论. 引理 1 说明：若 $f(z)$ 是定义在 $D$ 内的解析函数，则 $|f(z)|^p\ (p>0)$ 是下调和函数. 类似地，可证 $|z|^a|f(z)|^p$ $(a>0,p>0)$ 在 $D$ 内是下调和的. 且若 $z=0\overline{\in} D$，则 $|z|^a|f(z)|^p$ $(p>0)$ 在 $D$ 是下调和的，甚至 $a<0$.

## 2.　调和函数的极值原理

**定理 1**　设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的子区域，$u(z)$ 是 $D$ 内的调和函数. 又设

$$a=\sup_{z\in D} u(z)<+\infty \quad (\text{对应地},\ a=\inf_{z\in D} u(z)>-\infty).$$

若存在 $z_0\in D$ 使得 $u(z_0)=a$，则在 $D$ 内 $u(z)\equiv a$.

**证**　根据定义 1，对 $z_0$，必有正数 $\rho_0$ 使圆盘 $U_0:=O(z_0,\rho_0)$ 包含在 $D$ 中，且使式$(1^*)$成立.

假设存在一点 $z'\in U_0$ 使得 $u(z')<u(z_0)$. 则存在 $z'$ 的一个参数圆 $U'$ 使得在其内有 $u(z)<[u(z_0)+u(z')]/2$. 取正数 $\rho'<\rho_0$ 使圆周 $\{z \mid |z-z_0|=\rho'\}$ 与 $U'$ 相交，那么

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho' e^{i\theta})\mathrm{d}\theta < u(z_0).$$

矛盾说明在 $U_0$ 内，$u(z)\equiv u(z_0)$.

根据上面证明，

$$A:=\{z|u(z)=\alpha, z\in D\}$$

是 $D$ 中的开集. 但另一方面,由 $u(z)$ 的连续性可知 $A$ 是 $D$ 中的闭集,从而必为 $D$ 的一个分支. 但 $D$ 是连通的,所以 $A=D$. ▌

**推论**　设 $D$ 相对紧的. 若 $u(z)$ 在 $D$ 内调和且在 $D\bigcup\partial D$ 上连续,则 $u(z)$ 在 $\partial D$ 上取最大、最小值.

**证**　不妨设 $u\neq\text{const.}$. 记

$$\alpha=\sup_{z\in D\bigcup\partial D}u(z),\quad \beta=\inf_{z\in D\bigcup\partial D}u(z).$$

则 $-\infty<\beta<\alpha<+\infty$. 又由于 $u(z)$ 在 $D\bigcup\partial D$ 上连续,故

$$\alpha=\sup_{z\in D}u(z),\quad \beta=\inf_{z\in D}u(z).$$

根据定理 1,对任意 $z\in D$, $u(z)\neq\alpha$ 和 $u(z)\neq\beta$ 必然同时成立. 从而 $u(z)$ 只能在 $\partial D$ 上取最大、最小值. ▌

### 3. Poisson 积分

先引入Poisson 核. 为此设 $\zeta=\rho e^{i\varphi}$, $z=re^{i\theta}$, 则

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}=\frac{\zeta\bar{\zeta}-z\bar{z}}{(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})}$$

$$=\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{|\zeta-z|^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right).$$

**定理 2**　设 $f(\theta)$ 是定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Lebesgue 可积的实值函数. 置

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\varphi,\quad(1)$$

则 $u(z)$ 是单位圆盘 $U:=O(0,1)$ 内的调和函数. 且若 $f(\theta)$ 在 $\theta_0$ 连续,则 $\lim\limits_{U\ni z\to e^{i\theta_0}}u(z)=f(\theta_0)$ ; 若 $f(\theta)$ 在 $\gamma:=\{\theta|\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\}$ 连续,则 $\lim\limits_{U\ni z\to e^{i\theta}}u(z)=f(\theta)$,其收敛在 $\gamma$ 上是一致的.

**证**　设 $\zeta=e^{i\varphi}$, $z=re^{i\theta}$. 则由积分

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi)\mathbf{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

是两个 Cauchy 型积分的实部即可看出 $u(z)$ 是调和的.

不妨设 $\theta_0=0$,则存在 $\delta:=\delta(\varepsilon)>0$,使得当 $|\varphi|<\delta$ 时

$$|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})-f(1)|<\varepsilon. \tag{3}$$

又

$$\left.\begin{aligned}&|u(z)-f(1)|\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})-f(1)|\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{(|\varphi|<\delta)}+\frac{1}{2\pi}\int_{(\delta\leqslant|\varphi|\leqslant\pi)}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

将式(4)最右边两项积分依次记为(*I*)和(*II*). 根据(3),

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{I})&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\varphi\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\mathrm{d}\varphi=\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

在(II)中,若 $|\theta|\leqslant\delta/2$,则有 $|\varphi-\theta|\geqslant|\varphi|-|\theta|\geqslant\delta/2$ 和

$$1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2\geqslant\sin^2(\delta/2).$$

于是若 $1-r\leqslant\eta(\varepsilon)$, 则

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{II})&\leqslant\frac{1-r^2}{2\pi\sin^2(\delta/2)}\int_0^{2\pi}(|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|+|f(1)|)\,\mathrm{d}\varphi\\&\leqslant\text{const.}\ (1-r)<\varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的,故由(4)、(5)和(6)即得 $\lim\limits_{U\ni z\to e^{i\theta_0}}u(z)=f(\theta_0)$.

有关一致收敛性可由 $f(\theta)$ 在 $\gamma$ 一致连续和类似的方法得到证明. ▌

**注** 对于给定的定义在圆周 $\partial U_\rho:=\{z\,|\,|z|=\rho\}$ 上的连续实函数 $f(z)$, 根据调和函数的最大值原理和定理 2, 由式(1)定义的函数 $u(z)$ 是唯一满足下面条件的函数: 在圆盘 $U_\rho:=O(0,\rho)$ 内

是调和的、在 $U_\rho \cup \partial U_\rho$ 上是连续的，而在 $\partial U_\rho$ 上等于 $f$.

称 $u(z)$ 为 $U_\rho$ 的以 $f(\theta)$ 为边界值的Poisson 积分或Dirichlet 问题的解(参看 § 3.4).

由定理 2 和定理 1 的推论可得

**定理** 3　设 $u(z)$ 是定义在开圆盘 $U_\rho := O(z_0, \rho)$ 内的调和函数，且在闭圆盘 $\overline{U}_\rho$ 上连续. 置 $\zeta - z_0 = \rho e^{i\varphi}$，$z - z_0 = re^{i\theta}$，则

$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi.$$

上式称为Poisson 公式. 下面定理是其应用，后面将用到它.

**定理** 4　设 $\{f_n(z)\}$ 是定义在区域 $D$ 上的解析函数列. 若存在一点 $z_0 \in D$ 使得 $f_n(z_0) \to 0$ $(n \to \infty)$，且 $f_n(z)$ 的实部 $u_n(z)$ 在区域 $D$ 上一致收敛于 0，则函数列 $\{f_n(z)\}$ 在 $D$ 的任一闭区域 $\overline{V}$ 上都一致收敛于 0.

**证**　设 $V$ 是包含于 $D$ 内的区域，其闭包 $\overline{V}$ 也包含于 $D$ 内. 任取一点 $z' \in V$，并用 $D$ 内的分段光滑的闭弧段 $\Gamma$ 连接 $z_0$ 和 $z'$. 取正数 $\rho$ 足够小使得 $\bigcup_{z \in \overline{V} \cup \Gamma} O(z, \rho) \subset G$. 对任意 $z \in \overline{V} \cup \Gamma$，对函数 $u_n$ 的 Poisson 公式关于 $r$ 微分，然后令 $r = 0$，就得到

$$\frac{\partial u_n(z)}{\partial r} = \frac{1}{\rho\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z + \rho e^{i\varphi}) \cos(\varphi - \theta) d\varphi. \tag{1}$$

若记 $M_n = \sup_{z \in G} |u_n(z)|$. 由一致收敛性得知 $M_n \to 0$ $(n \to \infty)$. 另一方面，将式(1)和公式 $\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{\partial u_n}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial u_n}{\partial y} \sin\theta$ 比较即得

$$\frac{\partial u_n(z)}{\partial x} = \frac{1}{\rho\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z + \rho e^{i\varphi}) \cos\varphi \, d\varphi,$$

$$\frac{\partial u_n(z)}{\partial y} = \frac{1}{\rho\pi}\int_0^{2\pi} u_n(z + \rho e^{i\varphi}) \sin\varphi \, d\varphi.$$

因此
$$\left|\frac{\partial u_n(z)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{2M_n}{\rho}, \quad \left|\frac{\partial u_n(z)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{2M_n}{\rho}. \tag{2}$$

又因为 $f_n'(z)=\frac{\partial u_n(z)}{\partial x}-i\frac{\partial u_n(z)}{\partial y}$，所以

$$|f_n'(z)|\leqslant\frac{4M_n}{\rho}. \tag{3}$$

现在，由于 $\bar{V}$ 是紧致的，故根据 Borel 有限覆盖定理，覆盖族 $\{O(z,\rho)\,|\,z\in\bar{V}\}$ 中存在有限元素 $O(z_1,\rho),\cdots,O(z_N,\rho)$ 覆盖 $\bar{V}$. 于是对任意 $z\in\bar{V}$，可用 $V$ 内的分段光滑的闭弧段 $\gamma$ 连接 $z'$ 和 $z$ 使得弧 $\gamma$ 的长度 $|\gamma|\leqslant 2N\rho$. 为估计 $f_n(z)$ 利用公式

$$f_n(z)=\int_{z_0}^{z}f_n'(\zeta)\mathrm{d}\zeta+f_n(z_0),$$

其中上式的积分是沿 $\Gamma\cup\gamma$ 求积的. 于是由式(2)、(3)得

$$f_n(z)\leqslant\frac{4M_n}{\rho}(2N\rho+|\Gamma|)+|f_n(z_0)|,$$

其中 $|\Gamma|$ 表示弧 $\Gamma$ 的长度. 由于 $f_n(z_0)\to 0$ 且 $M_n\to 0\ (n\to\infty)$，故结论成立. ▌

### 4. Laplace 方程、调和函数的等价定义

对于具有二阶连续偏导数的实值函数 $u$，用 Laplace 方程判断其调和性仍是可行的. 由于 Riemann 曲面的相邻关系是解析的，因此在不同的参数下，根据 § 1 式(1)，Laplasc 算子满足关系

$$\begin{aligned}\Delta_{z_1}u&=4\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}=4\frac{\partial z}{\partial z_1}\frac{\partial\bar{z}}{\partial\bar{z}_1}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}\\&=4\left|\frac{\partial z}{\partial z_1}\right|^2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}=4\left|\frac{\partial z}{\partial z_1}\right|^2\Delta_z u.\end{aligned}$$

所以，在不同局部参数下，$\Delta u=0$（或 $>0$、或 $<0$）是不变的.

**定义 2**　设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的子区域. 若 $u(z)$ 是定义在 $D$ 中具有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程 $\Delta u(z)=0$ 的函数，则称

$$^*du := -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

为微分 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ 的共轭微分. 而

$$du + i\,^*du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)dz$$

称为解析微分，尽管它未必是某个解析函数的微分.

**注** 当积分沿着给定的分段光滑的弧 $\alpha$ 进行时，为方便起见，常用 $\pm\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$ 代替 $^*du$，其中 $\nu$ 为 $\alpha$ 上的法线方向. 若积分沿着区域 $D$ 的分段光滑的边界 $\partial D$ 进行时，则

$$^*du = -\frac{\partial u}{\partial \nu}ds,$$

其中 $\nu$ 为 $\partial D$ 上关于区域 $D$ 的内法向.

现在设 $\Delta u(z)=0$. 如果将 $u$ 限制在参数圆 $U$ 中，定义

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1}$$

则 $f(z)$ 必在 $U$ 中解析. 事实上，若令 $\tilde{u}=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\tilde{v}=\frac{\partial u}{\partial y}$，则它们必满足 Cauchy-Riemann 方程. 又由(1)可得

$$fdz = du + i\,^*du. \tag{2}$$

据 Cauchy 定理，$fdz$ 沿 $U$ 中任一同调于零的任一闭曲线 $\gamma$ 积分为 0. 又 $du$ 是正合微分，故沿 $U$ 中任一同调于零的任一闭曲线 $\gamma$ 的积分也为 0. 从而由(2)可得

$$\int_\gamma {}^*du = \int_\gamma -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = 0. \tag{3}$$

虽然上面 $f(z)$ 定义只限制在 $U$ 中，但 $fdz$ 却在整个 $D$ 中有意义. 因而式(3)对于 $D$ 中任一同调于 0 的闭曲线 $\gamma$ 都成立. 于是对单连通区域 $D' \subset D$，函数

$$v(z):=\int_{z_0}^{z} {}^{*}\mathrm{d}u=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \qquad (z_0\in D')$$

在 $D'$ 中是单值函数. 容易验证 $\Delta v(z)=0$ 且函数

$$g(z)=u(z)+\mathrm{i}v(z)$$

必为 $D'$ 上的单值解析函数，从而满足平均值定理，即对任意参数圆 $U':=O(z',\rho')\subset D'$，对任意实数 $\rho\in(0,\rho')$

$$g(z')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(z'+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

从而有

$$u(z')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z'+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

由此可见 $u(z)$ 在 $D'$ 内是调和的. 再由 $D'$ 的任意性可知 $u(z)$ 是 $D$ 上的调和函数.

反之，设 $v$ 为调和函数. 对定义域内的任一点 $z_0$ 及其参数圆 $U$，在 $U$ 的边界 $\partial U$ 上取 $f=v$，则由定理 2 的式(2)定义的函数 $u$ 必为某解析函数的实部，故满足 Laplace 方程. 同时根据定理 2 及调和函数的极值原理，在 $U$ 内有 $u\equiv v$.

根据上面的证明，有：

**定理 5** 具有二阶连续偏导数的实值函数 $u$ 为调和函数的充分必要条件是

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

### 5. 共轭调和函数

**定义 3** 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的子区域. 若 $u(z)$ 是 $D$ 上的调和函数，则函数

$$v(z):=\int_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y=\int_{z_0}^{z}{}^*\mathrm{d}u$$

称为 $u(z)$ 的共轭调和函数，记为 $u^*(z)$，其中积分是沿连接 $z_0$ 和 $z$ 的分断光滑的弧求积.

共轭调和函数是多值的，且在相差一常数的意义下是唯一的. 另外还有

$$\mathrm{d}(u^*)={}^*\mathrm{d}u.$$

虽然解析函数的实部和虚部都是互为共轭的调和函数，但两个调和函数 $u(z)$、$v(z)$ 的线性组合 $u(z)+\mathrm{i}v(z)$ 未必是解析函数.

根据上一段的证明，任意调和函数在其定义域中每一点的足够小的单连通邻域内必有(单值)共轭调和函数，但一般说来，这些局部共轭调和函数未必能连合成整个区域 $D$ (或曲面 $R$ )上的(单值)共轭调和函数. 但是，如果 $D$ (或曲面 $R$ )是单连通的，那么，根据第二章 § 2 的单值性定理，这种(单值)共轭调和函数是存在的. 更引人感兴趣的是下面的关于解析函数的单值性定理.

**定理 6**　设 $z_0$ 是单连通区域 $G$ 之一点，$f_0(z)$ 是在 $z_0$ 的一个邻域内定义的解析函数. 若 $f_0(z)$ 可以沿从 $z_0$ 引出且全部位于 $G$ 中的折线进行解析延拓，则所有可能的这种延拓之全体可用来定义一个在整个 $G$ 中正则的单值解析函数.

### 6. Harnack 原理

设 $u(z)$ 是圆盘 $U_\rho:=O(0,\rho)$ 内的调和函数，而在闭圆盘 $\overline{U}_\rho$ 连续. 据不等式

$$\frac{\rho-r}{\rho+r}\leqslant\frac{\rho^2-r^2}{|\rho e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r},\tag{1}$$

若在 $U_\rho$ 内 $u(z)\geqslant 0$，则

$$u(z) \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta})d\theta \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}u(0), \quad z=re^{i\theta}. \tag{2}$$

同理易估计另一方向不等式. 由此得Harnack 不等式

$$\frac{\rho-|z|}{\rho+|z|}u(0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{\rho+|z|}{\rho-|z|}u(0). \tag{3}$$

Harnack 不等式可以推广为下面形式:

**定理 7** 设 $\overline{G}$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一紧致子区域, 对任意正数 $\rho$, 记 $G(\rho)=\bigcup\limits_{z\in\overline{G}}O(z,\rho)$, 存在一常数 $K_\rho(G)$ 使得对任意定义在 $\overline{G(\rho)}$ 的恒取正值的调和函数 $u(z)$、对任意两点 $z、z_0\in\overline{G}$,

$$u(z) \leqslant K_\rho(G)u(z_0). \tag{4}$$

**证** 由于$\{O(z,\rho/2) \mid z\in\overline{G}\}$是 $\overline{G}$ 的一个开覆盖, 则必有一个有限子覆盖, 记其为 $\mathscr{A}$. 不妨设该子覆盖族由 $m(\rho)$ 个圆盘组成并含有 $O(z_0,\rho/2)$. 记 $K_\rho(G)=(3\rho)^{2m(\rho)}$.

现在, 用一曲线 $L$ 连接 $z、z_0$, 使得 $L\subset\overline{G}$. 于是存在 $\mathscr{A}$ 的某个子族$\{O(z_j,\rho/2)\}_{j=0}^J$覆盖 $L$, 其中 $z\in O(z_J,\rho/2)$, 而每个 $O(z_j,\rho/2)$ 都与 $O(z_{j-1},\rho/2)$、$O(z_{j+1},\rho/2)$相交, 其中 $j=1,2,\cdots,J-1$. 根据 Harnack 不等式即可得

$$u(z) \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}u(z_J), \quad u(z_j) \leqslant \left[\frac{\rho+r}{\rho-r}\right]^2 u(z_{j-1}), \quad r\leqslant \rho/2,$$

其中 $j=1,\cdots,J$. 由此可得 $u(z)\leqslant K_\rho(G)u(z_0)$. ▌

**推论** 设 $\overline{G}$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一紧致子区域, 而 $u(z)$ 是定义于 $\overline{G}$ 的调和函数. 若在 $\overline{G}$ 上恒有 $u(z)>0$. 则存在一仅与区域 $G$ 有关的常数 $K(G)$ 使得

$$u(z) \leqslant K(G)u(z_0), \quad \forall\, z、z_0 \in \overline{G}. \tag{5}$$

由 Harnack 不等式可导出一重要定理, 即Harnack 原理:

**定理 8** 设 $u_n(z)$ 是定义在 Riemann 曲面 $R$ 的子区域 $D_n$ 内的调和函数. 记 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$. 如果对任一 $z\in D$, 存在邻域 $U_z$, 使得除有

限个区域外所有的 $D_n$ 都包含 $U_z$；而且在 $U_z$ 中，当 $n$ 足够大时有 $u_n(z)\leqslant u_{n+1}(z)$，那么或者 $u_n(z)$ 在 $D$ 内紧致一致收敛于 $+\infty$，或者在 $D$ 内紧致一致收敛于 $D$ 内的一个调和函数 $u(z)$.

**证**　设 $z_0\in D$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z_0)=+\infty$. 考虑 $z_0$ 满足定理条件的参数圆 $V_0:=O(z_0,r)$，则有自然数 $m$，使当 $n\geqslant m$ 时 $u_n(z)$ 在 $V_0$ 内调和且 $u_n(z)\leqslant u_{n+1}(z)$. 若在 (3)式的左边不等式内以 $u_n-u_m$ 代替，则可得 $u_n$ 在圆盘 $V_0':=O(z_0,r/2)$ 内一致趋于 $+\infty$.

另一方面，若有 $z_1\in D$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z_1)<+\infty$，应用式 (3)右边不等式同样可证 $u_n(z)$ 在 $V_1':=O(z_1,r_1/2)$ 上有界. 记

$$D_1=\{z\in D|\lim_{n\to\infty}u_n(z)=+\infty\},$$

$$D_2=\{z\in D|\lim_{n\to\infty}u_n(z)<+\infty\}.$$

据上面证明，$D_1$ 和 $D_2$ 都是开集，且 $D=D_1\cup D_2$. 由于 $D$ 是连通集，故 $D_1$ 和 $D_2$ 中必有一为空集.

若至少有一点 $z'\in D$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z')=+\infty$，那么 $D_1\neq\varnothing$，由此即得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z)\equiv+\infty$. 其致密一致收敛性可由 Heine-Borel 有限覆盖定理来证明.

相反地，若 $u_n(z)$ 的极限处处有限，采用上述对应情形的记号，对圆盘 $V_1'$ 及 $n\geqslant m$ 必有 $u_n(z)-u_m(z)\leqslant 3[u_n(z_1)-u_m(z_1)]$. 这说明 $u_n(z)$ 在一点收敛必导致在某一邻域内一致收敛. 应用 Heine-Borel 有限覆盖定理，可得 $u_n(z)$ 在 $D$ 上紧致一致收敛. 至于极限函数 $u(z):=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(z)$ 的调和性可从 $u(z)$ 能以 Poisson 积分表示，并且积分核是调和函数得出. ▌

### 7. Harnack 原理的一般形式

**定理 9**　设 Riemann 曲面 $R$ 上有一调和函数族 $\mathscr{U}$ 满足条件：对任意 $u_1、u_2\in\mathscr{U}$ 存在 $u\in\mathscr{U}$ 使 $u\geqslant\max(u_1,u_2)$，则函数

$$U(z):=\sup_{u\in\mathscr{U}}u(z)$$

或者为调和，或者恒等于 $+\infty$.

**证** 对任一点 $z_0\in R$,存在一函数列 $u_n\in\mathscr{U}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}u_n(z_0)=U(z_0).$$

取 $v_1=u_1$，由条件可取 $v_2\in\mathscr{U}$ 使 $v_2\geqslant\max(u_2,v_1)$. 归纳假设 $v_{n-1}$ 已取好，则取 $v_n\in\mathscr{U}$ 使 $v_n\geqslant\max(u_n,v_{n-1})$. 由此得一 $\mathscr{U}$ 中非减函数列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 得同样有

$$\lim_{n\to\infty}v_n(z_0)=U(z_0).$$

根据 Harnack 原理，

$$U_0(z):=\lim_{n\to\infty}v_n(z)$$

或为调和，或恒为 $+\infty$，且满足条件 $U_0(z_0)=U(z_0)$.

现在，对另一点 $z_0'\in R$ 必有一函数列 $u_n'\in\mathscr{U}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}u_n'(z_0')=U(z_0').$$

于是，类似于前面推理，根据条件 $v_n'\geqslant\max(u_n',v_n,v_{n-1})$，取一 $\mathscr{U}$ 中非减函数列 $\{v_n'\}_{n=1}^{\infty}$，其极限函数

$$U_0'(z):=\lim_{n\to\infty}v_n'(z)$$

必满足下列两条件：

(1) $U_0'(z)\geqslant U_0(z)$；和

(2) $U_0'(z_0)=U_0(z_0)$，$U_0'(z_0')=U(z_0')$.

如果 $U_0$ 和 $U_0'$ 都是有限的，则 $U_0-U_0'$ 在 $z_0$ 有极大值 0. 据最大值原理，必有 $U_0=U_0'$. 又由于 $U(z_0')=U_0(z_0')$，故 $z_0$ 的任意性蕴含 $U(z)\equiv U_0(z)$ 的调和性.

若 $U_0(z)\equiv+\infty$，则 $U_0'(z)\equiv+\infty$. 从而 $U(z_0')=U_0'(z_0')=+\infty$. 由 $z_0'$ 的任意性得 $U(z)\equiv+\infty$. ▌

8. Dirichlet 原理

**引理 2**　设 $w(z)$ 是闭圆环 $\Delta:=\{z\,|\,0<\rho\leqslant|z|\leqslant 1\}$ 上的连续函数，且在开圆环 $\Delta^{\circ}:=\{z\,|\,\rho<|z|<1\}$ 上具有分片连续的一阶偏导数. 又设 $u(z)$ 是 $\Delta^{\circ}$ 内的调和函数，且在 $\Delta$ 上是连续的. 若在 $\Delta$ 边界 $\partial\Delta:=\Delta\setminus\Delta^{\circ}$ 上 $u=w$，且 $D[w]:=D_{\Delta}[w]<\infty$，则

$$D[u]\leqslant D[w].$$

如果 $w$ 在 $\Delta^{\circ}$ 上不是调和的，那么 $D[u]<D[w]$.

**证**　设在 $\Delta^{\circ}$ 内

$$\left.\begin{aligned}&u(z)=u(re^{i\theta})=A\log r+a_0\\&+\sum_{k=1}^{\infty}(a_kr^k+a_{-k}r^{-k})\cos k\theta+\sum_{k=1}^{\infty}(b_kr^k+b_{-k}r^{-k})\sin k\theta,\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(e^{i\theta})\,d\theta,\\a_k+a_{-k}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})\cos k\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(e^{i\theta})\cos k\theta\,d\theta,\\b_k+b_{-k}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(e^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}A\log\rho+a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}w(\rho e^{i\theta})d\theta,\\a_k\rho^k+a_{-k}\rho^{-k}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\cos k\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(\rho e^{i\theta})\cos k\theta d\theta,\\b_k\rho^k+b_{-k}\rho^{-k}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})\sin k\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}w(\rho e^{i\theta})\sin k\theta d\theta.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

置

$$\left.\begin{aligned} u_n(z) = A\log r + a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k r^k + a_{-k} r^{-k})\cos k\theta \\ + \sum_{k=1}^{n}(b_k r^k + b_{-k} r^{-k})\sin k\theta, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

则 $\Delta u_n = 0$，且

$$\frac{\partial u_n}{\partial r} = \frac{A}{r} + \sum_{k=1}^{n} k(a_k r^{k-1} - a_{-k} r^{-k-1})\cos k\theta + \sum_{k=1}^{n} k(b_k r^{k-1} + b_{-k} r^{-k-1})\sin k\theta,$$

所以

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_n(e^{i\theta})\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = 2a_0 A + \sum_{k=1}^{n} k(a_k^2 - a_{-k}^2) + \sum_{k=1}^{n} k(b_k^2 - b_{-k}^2),$$

且根据(2)，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta \\ &= \frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\, d\theta + \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{-k})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\cos k\theta\, d\theta \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} k(b_k - b_{-k})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} w(e^{i\theta})\sin k\theta\, d\theta \\ &= 2a_0 A + \sum_{k=1}^{n} k(a_k^2 - a_{-k}^2) + \sum_{k=1}^{n} k(b_k^2 - b_{-k}^2). \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{2\pi}\left(w(e^{i\theta}) - u_n(e^{i\theta})\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta = 0.$$

类似可得

$$\int_0^{2\pi}\left(w(\rho e^{i\theta}) - u_n(\rho e^{i\theta})\right)\left(\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)_{r=\rho} d\theta = 0.$$

根据 Green 公式有 $D_\Delta[w-u_n,u_n]=0$. 从而

$$D_\Delta[w]=D_\Delta[u_n]+D_\Delta[w-u_n]\geqslant D_\Delta[u_n]\geqslant D_{\Delta'}[u_n],$$

其中 $\Delta'$ 是包含在 $\Delta$ 内的圆环域. 先令 $n\to\infty$, 然后令 $\Delta'\to\Delta$ 则得

$$D[u]\leqslant D[w]. \tag{5}$$

下面证明若 $D[u]=D[w]$, 则 $u\equiv w$.

设 $v(z)=w(z)+\lambda(u(z)-w(z))$, 它显然满足关于 $w(z)$ 的条件, 则

$$D[u]\leqslant D[v]=D[w]+2\lambda D[w,u-w]+\lambda^2 D[u-w].$$

因此,若 $D[u]=D[w]$,则 $2\lambda D[w,u-w]+\lambda^2 D[u-w]\geqslant 0$. 由于 $\lambda$ 的任意性可得 $D[w,u-w]=0$, 故等式 $D[u]=D[w]+D[u-w]$ 成立. 因此 $D[u-w]=0$, 即得 $u-w\equiv const.$. 但在 $\Delta$ 边界 $\partial\Delta:=\Delta\backslash\Delta^\circ$ 上有 $u-w=0$, 故 $u-w\equiv 0$, 即 $u\equiv w$. 因此, 如果 $w$ 在 $\Delta^\circ$ 上不是调和的, 那么 $D[u]<D[w]$. ▌

类似地可证

**引理 3** 设 $w(z)$ 是闭圆盘 $\overline{O(0,1)}$ 上的连续函数, 且在开圆盘 $O(0,1)$ 上的连续上具有分片连续的一阶偏导数. 又设 $u(z)$ 是开圆盘 $O(0,1)$ 内的调和函数, 且在闭圆盘 $\overline{O(0,1)}$ 上是连续的. 若在圆周 $\{z\mid |z|=1\}$ 上 $u=w$, 且 $D[w]<\infty$, 则

$$D[u]\leqslant D[w].$$

如果 $w$ 在 $O(0,1)$ 内不是调和的, 那么 $D[u]<D[w]$.

**引理 4** 设 $\{u_n(z)\}_{n=1}^\infty$ 是闭 Riemann 的区域 $D$ 内的调和函数. 如果存在一正数 $K$ 和点 $z_0\in D$ 使得对任意自然数 $n$, $D[u_n]\leqslant K$ 且 $u_n(z_0)=0$, 那么 $\{u_n(z)\}_{n=1}^\infty$ 是一正规族.

**证** 设 $\Delta:=\overline{O(z_0,\rho)}$ 是包含在 $D$ 内的闭圆盘. 又设 $v_n(z)$ 是 $u_n(z)$ 在 $\Delta$ 内的共轭调和函数. 将 $u_n(z)$ 规范化, 使得 $v_n(z_0)=0$, 并置 $f_n(z)=u_n(z)+iv_n(z)$. 则 $f_n(z)$ 在 $\Delta$ 内为正则且 $f_n(z_0)=0$.

根据引理 1，$|f_n'(z)|^2$ 是下调和的，于是对于 $\Delta_1:=\overline{O(z_0,\rho_1)}$ $(\rho_1<\rho)$ 内的任一点 $z$

$$
|f_n'(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi(\rho-\rho_1)^2}\int_0^{\rho-\rho_1}\int_0^{2\pi}|f_n'(z+re^{i\theta})|^2\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta
$$

$$
\leqslant\frac{D[u_n]}{\pi(\rho-\rho_1)^2}\leqslant\frac{K}{\pi(\rho-\rho_1)^2},
$$

$$
|f_n'(z)|^2\leqslant\sqrt{\frac{K}{\pi}}\cdot\frac{1}{\rho-\rho_1},\quad\forall\, z\in\Delta_1. \tag{1}
$$

所以对任意 $z\in\Delta_1$ 有

$$
|u_n(z)|\leqslant|f_n(z)|\leqslant
$$

$$
\int_0^{z}|f_n'(z_0+re^{i\theta})|\,\mathrm{d}r\leqslant\sqrt{\frac{K}{\pi}}\cdot\frac{\rho_1}{\rho-\rho_1}, \tag{2}
$$

于是对于任意两点 $z_1$、$z_2\in\Delta_1$ 有

$$
\left.\begin{aligned}
&|u_n(z_1)-u_n(z_2)|\leqslant|f_n(z_1)-f_n(z_2)|\\
&\leqslant\int_{z_1}^{z_2}|f_n'(z)|\,|\mathrm{d}z|\leqslant\sqrt{\frac{K}{\pi}}\cdot\frac{|z_2-z_1|}{\rho-\rho_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

因此 $\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 必为一致有界、且在 $\Delta_1$ 上是等度连续的，从而在 $D$ 的任意一个紧子域 $D_1$ 上亦如此．根据 Arzelà 定理，$\{u_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个正规族． ▌

**定理 10** （Dirichlet 原理）设闭 Riemann 曲面 $R$ 覆盖在复球面 $K:=\{z\,|\,|z|\leqslant\infty\}$ 上．设 $D$ 是 $R$ 的一个子区域，其关于 $R$ 的相对边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交的 Jordan 曲线组成：$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$．又设 $D$ 上存在这样一个函数 $w_0(z)$，它在 $\overline{D}$ 上连续、具有分片连续一阶偏导数且其 Dirichlet 积分 $D[w_0]$ 有限．将全体与 $w_0(z)$ 具有相同性质且在 $\Gamma$ 上与 $w_0$ 相等的函数 $w(z)$ 组成之族记为 $\mathscr{F}$．若置

$$
d=\inf_{w\in\mathscr{F}}D[w],
$$

则存在一调和函数 $u(z)\in\mathscr{F}$ 使得 $D[u]=d$.

**证**　根据 $d$ 的定义，可在 $\mathscr{F}$ 中选取一个函数列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $D[w_n]\to d\ (n\to\infty)$. 设 $\Gamma_i'$ 是 $D$ 中的位于 $\Gamma_i$ 之足够小邻域内的一解析 Jordan 曲线，它与 $\Gamma_i$ 所围区域是一个二连通区域 $\Delta_i$，其中 $\Delta_i$ 与 $\Delta_j(i\neq j)$ 不交.

设 $u_n^{(i)}(z)$ 是 $\Delta_i$ 的调和函数，使在 $\Gamma_i'\cup\Gamma_i$ 上 $u_n^{(i)}(z)=w_n(z)$. 现在将 $\Delta_i$ 共形映上 $\zeta$-平面的圆环域

$$V_i:=\{\zeta\mid 0<\rho_i<|\zeta|<1\}$$

使得 $\Gamma_i'$ 和 $\Gamma_i$ 分别对应 $\{\zeta\,|\,|\zeta|=\rho_i\}$ 和 $\{\zeta\,|\,|\zeta|=1\}$. 将 $u_n^{(i)}(z)$ 和 $w_n(z)$ 考虑为 $V_i$ 上关于变量 $\zeta$ 的函数，由于 Dirichlet 积分是共形不变的，则由引理 2 可得 $D_{\Delta_i}[u_n^{(i)}]\leqslant D_{\Delta_i}[w_n]$.

因此，若在 $D$ 上定义 $\tilde{w}_n(z)$ 使得在 $\Delta_i$ 上 $\tilde{w}_n=u_n^{(i)}(i=1,2,\cdots,k)$、而在 $D\setminus\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i$ 上 $\tilde{w}_n(z)=w_n(z)$，则 $\tilde{w}_n\in\mathscr{F}$ 且 $D[\tilde{w}_n]\leqslant D[w_n]$，所以 $D[\tilde{w}_n]\to d\ (n\to\infty)$. 由此可假设

$$w_n(z)\text{ 在 }\Delta_i(i=1,2,\cdots,k)\text{ 内调和.}\tag{1}$$

如果在 $V_i$ 上置 $w_n(z)=v_n(\zeta)$，由于 $v_n(\zeta)-v_1(\zeta)$ 在 $V_i$ 内调和且在 $\{\zeta\,|\,|\zeta|=1\}$ 取值 0，则在 $V_i^*:=\{\zeta\,|\,\rho_i<|\zeta|<1/\rho_i\}$ 内调和且

$$D_{V_i^*}[v_n-v_1]=2D_{V_i}[v_n-v_1]$$
$$=2D_{\Delta_i}[w_n-w_1]\leqslant 2\left(\sqrt{D_{\Delta_i}[w_n]}+\sqrt{D_{\Delta_i}[w_1]}\right)^2.$$

所以 $D_{V_i^*}[v_n-v_1]$ 关于 $n=1,2,\cdots$ 有界. 又因为在 $\{\zeta\,|\,|\zeta|=1\}$ 上 $v_n-v_1=0$，应用引理 4，可以从 $\{v_n-v_1\}$ 选一子列，仍用原记号，使其在 $V_i^*$ 上一致收敛，从而 $v_n$ 在 $V_i^*$ 上也一致收敛. 由此可见存在 $w(z)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}w_n(z)=w(z)\text{ 在 }\Delta_i\text{ 是一致的，}i=1,2,\cdots,k.\tag{2}$$

于是 $w(z)$ 在 $\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i$ 内调和、在 $\Gamma$ 上连续，且在 $\Gamma$ 上 $w=w_1=w_0$.

设 $\gamma_i$ 是 $\Delta_i$ 内分离 $\Gamma_i'$ 和 $\Gamma_i$ 的解析 Jordan 曲线. 又设 $\Omega_0$ 是以

$\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 为边界的且包含 $\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i'$ 的 $D$ 的连通子区域. 置 $\Omega=D\backslash\Omega_0$, 则由(2)得

$$D_\Omega[w]=\lim_{n\to\infty}D_\Omega[w_n]. \tag{3}$$

设 $\varphi_n(z)$ 是 $\Omega_0$ 内的调和函数, 使得在 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 上 $\varphi_n=w_n$. 根据假设(1), $w_n(z)$ 在 $\gamma_i$ 调和. 由于在 $\gamma_i$ 上 $\varphi_n-w_n=0$, 故 $\varphi_n-w_n$ 在 $\gamma_i$ 的某邻域 $U_i$ 内调和, 从而 $\varphi_n$ 亦在 $U_i$ 内调和. 所以 $\partial\varphi_n/\partial v$ 在 $\gamma_i$ 上连续,其中 $v$ 表示关于 $\Omega_0$ 的内法向. 根据 Green 公式,

$$D_{\Omega_0}[w_n-\varphi_n,\varphi_n]=-\sum_{i=1}^{k}\int_{\gamma_i}(w_n-\varphi_n)\frac{\partial\varphi_n}{\partial v}\,ds=0,$$

从而

$$D_{\Omega_0}[w_n]=D_{\Omega_0}[\varphi_n]+D_{\Omega_0}[w_n-\varphi_n],$$

故

$$D_{\Omega_0}[\varphi_n]\leqslant D_{\Omega_0}[w_n]. \tag{4}$$

由(2)知 $w_n(z)$ 在 $U_i$ 内是一致收敛的. 由(4)知 $D_{U_i}[\varphi_n-w_n]$ 关于 $n=1,2,\cdots$ 是有界的, 而且在 $\gamma_i$ 上有 $\varphi_n-w_n=0$. 因此, 在 $U_i$ 内 $\varphi_n=w_n$, 从而 $\varphi_n$ 是一致收敛的. 置

$$\varphi(z)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z),$$

则 $\varphi(z)$ 在 $\Omega_0\cup(\bigcup_{i=1}^{k}U_i)$ 内调和, 且 $D_{\Omega_0}[\varphi]=\lim_{n\to\infty}D_{\Omega_0}[\varphi_n]$. 故根据(4),

$$D_{\Omega_0}[\varphi]\leqslant\lim_{n\to\infty}D_{\Omega_0}[w_n]. \tag{5}$$

现在, 在 $D$ 内定义函数 $u(z)$ 如下: 在 $\Omega_0$ 内定义 $u=\varphi$, 在 $D\backslash\Omega_0$ 上定义 $u=w$. 那么根据(3)和(5),

$$D[u]\leqslant\lim_{n\to\infty}D[w_n]=d.$$

由于 $u\in\mathscr{F}$, 则

$$D[u]=d. \tag{6}$$

显然 $u$ 在 $D\setminus\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 内调和. 下面证明 $u$ 在 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 调和. 为此假设 $u$ 在某点 $z_0\in\gamma_i$ 处不调和. 设 $\Delta$ 是以 $z_0$ 为圆心的 $D$ 内的足够小的圆盘, 而 $v(z)$ 是以 $u(z)$ 为边界值的 $\Delta$ 的 Dirichlet 解. 则根据引理 3, $D_\Delta[v]\leqslant D_\Delta[u]$. 于是若在 $D$ 上定义函数 $\tilde{u}$ 如下: 在 $\Delta$ 内置 $\tilde{u}=v$, 在 $D\setminus\Delta$ 上置 $\tilde{u}=u$, 则 $\tilde{u}\in\mathscr{F}$, 且 $D[\tilde{u}]<D[u]=d$. 矛盾. 从而 $u$ 在 $\bigcup_{i=1}^{k}\gamma_i$ 调和, 即得知在 $D$ 内调和. ▌

**注** 若 $w\in\mathscr{F}$ 且 $D[w]=d$, 则根据引理 3, $w$ 在 $D$ 内调和, 因此 $w\equiv u$. 从而 $w$ 是唯一的.

## §3 半调和函数与 Dirichlet 问题

### 1. 半连续函数

设 $R$ 是一个在复 $z$-球面上的 Riemann 曲面, 而 $w(z)$ 是定义在 $R$ 的子集 $D$ 上的广义实值函数. 又设 $-\infty\leqslant w(z)<+\infty$ (对应地, $-\infty<w(z)\leqslant+\infty$). 若对于点 $z_0\in D$,

$$w(z_0)\geqslant\varlimsup_{D\ni z\to z_0}w(z)\quad(\text{对应地, }w(z_0)\leqslant\varliminf_{D\ni z\to z_0}w(z)),$$

则称 $w(z)$ 在点 $z_0$ 是上半(对应地, 下半)连续的. 若 $w(z)$ 在 $D$ 上的每一点都是上半(对应地, 下半)连续的, 则称 $w(z)$ 在 $D$ 上是上半连续的(对应地, 下半连续的).

容易看出, $w(z)$ 在 $R$ 的开子区域 $G$ 内是上半连续的(对应地, 下半连续的)当且仅当对任意实数 $t$, $\{z\,|\,w(z)<t,\ z\in G\}$(对应地, $\{z\,|\,w(z)>t,\ z\in G\}$)是开集.

设 $E$ 是 $R$ 的紧致子集, 而 $w(z)$ 是定义在 $E$ 上的上半连续(对

应地，下半连续)函数．那么存在实数 $M$ 使得

$$w(z) \leqslant M \quad (\text{对应地}, \ w(z) \geqslant M). \tag{1}$$

事实上，如果假设不等式不成立，那么存在 $E$ 中点列 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $w(z_k) \to +\infty$ (对应地，$\to -\infty$)．不妨设 $z_k$ 收敛于点 $z_0 \in E$．则有 $w(z_0) = +\infty$ (对应地，$= -\infty$)．与定义矛盾．故式(1)成立．

为讨论半调和函数性质需要，引进下面引理．

**引理 1** 设 $\Omega$ 是复 $z$-球面的一开集．则 $w(z)$ 是 $\Omega$ 内的上半(对应地，下半)连续函数当且仅当对 $\Omega$ 内的任意紧集 $E$，存在 $E$ 上连续函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\varphi_k$ 单调下降(对应地，上升)趋于 $w$．

**证** 只证上半连续情形．设条件成立．对任意 $z_0 \in \Omega$，取正数 $r > 0$ 足够小使得 $E = \overline{O(z_0, r)} \subset \Omega$．则集 $\{z \mid \varphi_k(z) < t, \ z \in O(z_0, r)\}$ 对任意实数 $t$ 皆是开集，故

$$\{z \mid w(z) < t, \ z \in O(z_0, r)\} := \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z \mid \varphi_k(z) < t, \ z \in O(z_0, r)\}$$

也是开集．从而 $w(z)$ 在 $E$ 是上半连续．

反之，设 $w(z)$ 在 $\Omega$ 内为上半连续．对任意紧集 $E \subset \Omega$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $E$ 的有限覆盖 $\{O(z_j, \varepsilon)\}_{j=1}^{m}$．构造单位分解

$$\sum_{j=1}^{m} \psi_j(z), \quad \forall z \in E,$$

其中 $\psi_j(z)$ 连续，且 $\psi_j(z) \geqslant 0$、$\operatorname{supp} \psi_j \subset O(z_j, \varepsilon)$．置

$$M_j = \sup_{z \in O(z_j, \varepsilon)} w(z), \quad g_\varepsilon(z) = \sum_{j=1}^{m} M_j \psi_j(z).$$

令 $\varepsilon = 1/k (k = 1, 2, \cdots)$ 得函数列 $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$．由于 $w(z)$ 在 $\Omega$ 上为上半连续，故 $\lim\limits_{k \to \infty} g_k(z) = w(z)$ $(z \in E)$．若取 $\varphi_1 = g_1$、$\varphi_2 = \min(\varphi_1, g_2)$、$\cdots$、$\varphi_k = \min(\varphi_{k-1}, g_k)$，则函数列 $\{\varphi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ 即为所求． ▌

## 2. 上、下调和函数及其最佳调和优、劣函数

极值性质是调和函数的重要性质，然而却不是它的特征属

性，而是半调和函数的属性．当然，之所以引进半调和函数概念还在于对其本身性质的兴趣．

**定义 1**　设 $R$ 是一叶在复 $z$-球面上的 Riemann 曲面，而 $v(z)$ 是定义在 $R$ 的子区域 $G$ 内的上半(对应地，下半)连续实值函数．又设 $v(z)\not\equiv-\infty$（对应地，$\not\equiv+\infty$）．称 $v(z)$ 是 $G$ 内的下调和函数(对应地，上调和函数)，如果下面条件成立：对于 $G$ 的任一子区域 $G'$，对于任一在 $G'$ 内调和而在其闭包 $\overline{G'}$ 连续的函数 $h(z)$，若在边界 $\partial G'$ 上 $v(z)\leqslant h(z)$（对应地，$v(z)\geqslant h(z)$），则在 $G'$ 内也有 $v(z)\leqslant h(z)$（对应地，$v(z)\geqslant h(z)$）．

上、下调和函数统称为半调和函数．

设 $v(z)$ 是定义在 $G$ 内的下调和(对应地，上调和)函数．对于闭包在 $G$ 内的任一开圆盘 $\Delta$，根据引理 1，存在在其闭包 $\overline{\Delta}$ 上的连续函数列 $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得对任意 $z\in\overline{\Delta}$，$\varphi_k$ 单调下降(对应地，上升)趋于 $v(z)$．由于圆盘 $\Delta$ 的以 $\varphi_k$ 为边值的 Poisson 积分 $H_k(z)$ 是在 $\Delta$ 内调和而在 $\overline{\Delta}$ 连续的函数，故根据定义，在 $\overline{\Delta}$ 上

$$H_1(z)\geqslant H_2(z)\geqslant\cdots\geqslant H_k(z)\geqslant v(z)$$

$$(\text{对应地，}H_1(z)\leqslant H_2(z)\leqslant\cdots\leqslant H_k(z)\leqslant v(z)).$$

又由于 $v(z)\not\equiv-\infty$（对应地，$\not\equiv+\infty$），根据 Harnack 原理，存在 $\Delta$ 内的调和函数 $\overline{H}$（对应地，$\underline{H}(z)$）使得

$$\lim_{k\to\infty}H_k(z)=\overline{H}(z)\geqslant v(z)$$

$$(\text{对应地，}\lim_{k\to\infty}H_k(z)=\underline{H}(z)\leqslant v(z)).$$

将 $\overline{H}(z)$（对应地，$\underline{H}(z)$）称为 $v(z)$ 在 $\Delta$ 内的调和上属或最佳调和优函数（对应地，调和下属或最佳调和劣函数）．

**注**　调和上、下属的概念显然适合 Jordan 区域的情形，只要用 Direchlet 问题的解代替 Poisson 积分即可(参看下面第 6 段)．

### 3. 半调和函数的平均值性质

**定理 1** 设 $R$ 是一盖在复 $z$-球面上的 Riemann 曲面，而 $v(z)$ 是定义在 $R$ 的子区域 $G$ 内的下调和(对应地，上调和)函数. 则对任意点 $z_0\in G$，存在正数 $\rho_0$，使得 $O(z_0,\rho_0)\subset G$ 且

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\quad\forall\,\rho\in(0,\rho_0)\qquad(*)$$

$$\left(\text{对应地},\ v(z_0)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\quad\forall\,\rho\in(0,\rho_0)\right).$$

**证** 只证下调和情形. 只需考虑 $G$ 中使得 $v(z_0)>-\infty$ 的点 $z_0$. 不妨设 $z_0$ 的参数圆之闭包 $\overline{\Delta'}:=\{z\mid |z-z_0|\leqslant\rho\}$ $(\rho>0)$ 包含于 $G$ 内. 根据第 1 段式(1)有 $\sup\limits_{z\in\overline{\Delta'}}v(z)<+\infty$.

对任意 $r\in(0,\rho_0)$，记 $\Delta=\{z\mid |z-z_0|<r\}$、$\gamma=\partial\Delta$、$\zeta=z_0+re^{i\theta}$. 设 $\overline{H}(z)$ 是第 2 段中所述 $v(z)$ 在 $\Delta$ 内的调和上属，而

$$H_1(z)\geqslant\cdots\geqslant H_n(z)\to\overline{H}(z)\geqslant v(z)\quad(\forall\,z\in\overline{\Delta})$$

是对应的调和函数列. 则

$$v(z_0)\leqslant H_n(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}H_n(\zeta)\mathrm{d}\theta,\tag{1}$$

又 $H_1-H_n$ 在 $\gamma$ 上关于 $n$ 为不减的，且 $H_1-H_n\to H_1-v\geqslant0$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}[H_1(\zeta)-H_n(\zeta)]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}[H_1(\zeta)-v(\zeta)]\mathrm{d}\theta.\tag{2}$$

由 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[H_1(\zeta)-H_n(\zeta)]\mathrm{d}\theta=H_1(z_0)-H_n(z_0)$ 和(1)、(2)得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[H_1(\zeta)-v(\zeta)]\mathrm{d}\theta\leqslant H_1(z_0)-v(z_0)<\infty.$$

故 $H_1(z)-v(z)$，从而 $v(z)$在 $\gamma$ 上可积. 因此，由(2)可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}H_n(\zeta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}v(\zeta)\mathrm{d}\theta.\tag{3}$$

由 (1)得知

$$-\infty < v(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\zeta)\mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta. \qquad (4)$$

定理得证. ▌

**注**　从定理 1 可看出：(i) 半调和性是局部性质.

(ii) 实值函数 $u(z)$ 为调和函数当且仅当 $u(z)$ 既为上调和函数又为下调和函数.

(iii) 类似地，由 $v(z_0) \leqslant H_v(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_\Delta H_v(z_0 + \rho e^{i\theta})\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$ 可以证明 $v(z)$ 在 $\Delta$ 上可积. 又由式(4)可得

$$\left.\begin{aligned} v(z_0) &= \frac{2}{r^2}\int_0^r v(z_0)\rho\mathrm{d}\rho \leqslant \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\theta})\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\iint_\Delta v(z_0 + \rho e^{i\theta})\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta, \quad \forall\, r \in (0, \rho_0). \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

由定理 1 容易证明下面的定理 2、3.

**定理 2**　(i)若函数 $v(z)$ 是上调和的，则函数 $-v(z)$ 是下调和的. 反之亦然.

(ii)　若函数 $v_i(z)(i=1,2,\cdots,n)$ 是上调和(对应地，下调和)的，则函数 $v(z) := \sum_{i=1}^n c_i v_i(z)$ $(c_i > 0)$ 是上调和(对应地，下调和)的.

(iii) 若函数 $v_i(z)(i=1,2,\cdots,n)$ 是上调和的，则函数 $v(z) := \min_{1\leqslant i\leqslant n} v_i(z)$ 是上调和的；若函数 $v_i(z)(i=1,2,\cdots,n)$ 是下调和的，则函数 $v(z) := \max_{1\leqslant i\leqslant n} v_i(z)$ 是下调和的.

**定理 3**　设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一子区域，而 $\{u_n(z)\}_{n=1}^\infty$ 是定义在 $D$ 内的上调和(对应地，下调和)函数列. 又设

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \quad \forall\, z \in D.$$

则 $u(z)$ 为上调和(对应地，下调和)，若下面两条件之一成立：

(i) 其收敛在 $D$ 内广义一致的.

(ii) 对每个固定的 $z\in D$, $u_n(z)$关于 $n$ 是单调增加(对应地,单调减少)的.

**定理** 4 设 $R$ 是一个覆盖在复 $z$-球面上的 Riemann 曲面,而 $v(z)$ 是定义在 $R$ 的子区域 $G$ 内的下调和(对应地,上调和)函数. 那么 $v(z)$在区域 $G$ 的任一紧致子区域上是可积的,从而在 $D$ 内几乎处处成立着 $v(z)>-\infty$.

**证** 根据定义,有 $v(z)\not\equiv-\infty$,所以存在一点 $z_0\in D$ 使得 $v(z_0)>-\infty$. 设 $\Delta$ 是包含于区域 $G$ 内以 $z_0$ 为心的圆盘,则由定理 1 的附注(iii)可知 $v(z)$在 $\Delta$ 上是可积的,从而 $v(z)>-\infty$在 $\Delta$ 内几乎处处成立. 由此容易证明 $v(z)$在包含于区域 $G$ 内的任意闭区域上是可积的. ▌

4. 半调和函数的极值原理

**定理** 5 (<u>极值原理</u>)设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个子区域,$v(z)$是 $G$ 内的下调和(对应地,上调和)函数. 记 $\alpha=\sup\limits_{z\in G} v(z)$ (对应地,$\alpha=\inf\limits_{z\in G} v(z)$). 若 $\alpha<+\infty$ (对应地,$\alpha>-\infty$)且存在一点 $z_0\in G$ 使得 $v(z_0)=\alpha$,则在 $G$ 内 $v(z)\equiv\alpha$.

**证** 只证下调和的情形. 置

$$A=\{z|v(z)=\alpha,\ z\in G\}.$$

则由 $v$ 的上半连续性可知 $A$ 是 $G$ 中相对闭集. 另一方面,$A$ 也必为 $G$ 的相对开集. 根据定理 1,对 $z_0\in A$,存在一正数 $\rho_0$ 使得

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta,\quad\forall\rho\in(0,\rho_0).\qquad(*)$$

但由于 $v(z_0)\geqslant v(z_0+\rho e^{i\theta})$,则

$$v(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta,\quad\forall\rho\in(0,\rho_0).$$

于是在邻域 $U_0:=O(z_0,\rho_0)$内 $v(z)=\alpha$ 几乎处处成立.

对任意 $z'\in U_0$，存在 $z_n\in U_0$ 使 $v(z_n)=\alpha$ 且 $z_n\to z'$ $(n\to\infty)$. 由上半连续性，有

$$v(z')\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}v(z_n)=\alpha.$$

又 $\alpha\geqslant v(z')$，从而 $\alpha=v(z')$. 即得 $U_0\subset A$. 所以 $A$ 为开集. 但 $G$ 是连通集，所以由 $z_0\in A\subset G$ 必有 $A=G$. ▌

**注**　事实上，定理 5 的证明只要求 $v(z)\not\equiv-\infty$、上半连且满足式( * )即可.

**引理 2**　设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个相对紧子区域. 又设 $v(z)\not\equiv-\infty$(对应地，$\not\equiv+\infty$)是定义在 $G$ 内的上半连续函数. 如果函数 $v(z)$ 或恒为常数、或在 $G$ 内不取最大值(对应地，最小值)，且存在实数 $K<+\infty$(对应地，$K>-\infty$)使得对 $G$ 的边界 $\partial G$ 上的每一点 $a$，有

$$\overline{\lim_{G\ni z\to a}}v(z)\leqslant K\quad(\text{对应地，}\underline{\lim_{G\ni z\to a}}v(z)\geqslant K),$$

那么在 $G$ 内也有 $v(z)\leqslant K$ (对应地，$v(z)\geqslant K$). 且若在 $G$ 的某一内点 $v(z)$ 取值 $K$，必有 $v(z)\equiv K$.

**证**　只证下调和情形. 置 $M=\sup\limits_{z\in G}v(z)\leqslant+\infty$.

若 $v(z)\equiv M$，则 $M=\overline{\lim\limits_{G\ni z\to a}}v(z)\leqslant K$. 故 $v(z)\leqslant K$，$\forall\ z\in G$.

若 $v(z)\not\equiv M$，由定义可知存在一点列 $z_n\in G$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}v(z_n)=M.$$

由条件知点列 $\{z_n\}$ 在 $G$ 内不可能有聚点. 否则假设 $z_0\in G$ 是其聚点，则有子列 $z_{n_k}\to z_0(k\to\infty)$. 于是由 $v$ 的上半连续性可得

$$M\geqslant v(z_0)\geqslant\lim_{k\to\infty}v(z_{n_k})=M.$$

这显然与 $v(z)$ 在 $G$ 内不取到最大值相矛盾. 所以由相对紧致性可知 $\{z_n\}$ 必有聚点 $a\in\partial G$. 故有子列 $z_{n_k'}\to a$，从而

$$M=\lim_{k\to\infty}v(z_{n_k'})\leqslant\overline{\lim_{G\ni z\to a}}v(z)\leqslant K.$$

即有 $v(z)\leqslant K$，$\forall\ z\in G$.

最后，若存在 $z_0\in G$ 使得 $v(z_0)=K$，必有 $v(z_0)=M=K$. 根据极值条件，在 $G$ 内有 $v(z)\equiv K$. ▌

**定理 6** （极值原理）设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个相对紧子区域，而 $v(z)$ 是 $G$ 内的下调和(对应地，上调和)函数. 又设 $h(z)$ 是 $G$ 内的调和函数，且在 $\overline{G}:=G\cup\partial G$ 上连续. 若对 $G$ 的边界 $\partial G$ 上的每一点 $\alpha$，有

$$\overline{\lim_{G\ni z\to\alpha}}\, v(z)\leqslant h(\alpha)\quad\left(\text{对应地，}\ \underline{\lim_{G\ni z\to\alpha}}\, v(z)\geqslant h(\alpha)\right),$$

则在 $G$ 内 $v(z)\leqslant h(z)$（对应地，$v(z)\geqslant h(z)$）；且若在 $G$ 内某一点等号成立，必有 $v(z)\equiv h(z)$.

**证** 根据定理 5，函数 $v(z)-h(z)$ 满足引理 2 的所有条件. 取 $K=0$ 即得本定理. ▌

综合定理 1、定理 5(参见附注)、引理 2 和定理 6 即得

**定理 7** 设 $v(z)$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的相对紧子区域 $G$ 内的上半连续（对应地，下半连续)实值函数. 又设 $v(z)\not\equiv-\infty$（对应地，$\not\equiv+\infty$). 那么下面三命题等价：

(i) $v(z)$ 为下调和(对应地，上调和)函数.

(ii) 对任意点 $z_0\in G$，存在正数 $\rho_0$，使得若 $O(z_0,\rho_0)\subset G$，则

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta,\quad\forall\ \rho\in(0,\rho_0)$$

$$\left(\text{对应地，}\ v(z_0)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+\rho e^{i\theta})d\theta,\quad\forall\ \rho\in(0,\rho_0)\right).$$

(iii) 对任一闭包在 $G$ 内的相对紧区域 $G'$，对任一在 $G'$ 内调和函数 $h(z)$，差函数 $v(z)-h(z)$ 或恒为常数、或在 $G'$ 内不取最大值(对应地，最小值).

**注** 第四章 § 1 定理 5 将证明下面又一等价命题：

(iv) 对任意点 $z_0\in G$，存在正数 $\rho_0$，使得若 $O(z_0,\rho_0)\subset G$，则

$$v(z_0)\leqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{|z-z_0|\leqslant\rho}v(z_0+re^{i\theta})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\quad\forall\ \rho\in(0,\rho_0)$$

$$\left(\text{对应地},\ v(z_0)\geqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{|z-z_0|\leqslant\rho}v(z_0+re^{i\theta})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\forall\ \rho\in(0,\rho_0)\right).$$

第四章 § 1 定理 7 还给出与 Laplace 方程有关的另一等价命题.

## 5. 上、下函数

设 $G$ 是以 $\Gamma$ 为其边界的 Riemann 曲面的相对紧子区域. 又设 $\Delta$ 是包含于 $G$ 内的圆盘. 对 $G$ 内的连续函数 $v(z)$, 设 $w(z)$ 是关于 $\Delta$ 以 $v(z)$ 为边界值的 Poisson 积分, 并置

$$v_\Delta(z)=\begin{cases} w(z), & \text{当 } z\in\Delta,\\ v(z), & \text{当 } z\in G\backslash\Delta.\end{cases}$$

则对任意两函数 $u(z)$、$v(z)\in C(G)$, 有

(i) $\alpha u_\Delta(z)+\beta v_\Delta(z)=(\alpha u(z)+\beta v(z))_\Delta$, 其中 $\alpha$、$\beta$ 是两个常数;

(ii) 在 $G$ 内, 若有 $u(z)\leqslant v(z)$, 则也有 $u_\Delta(z)\leqslant v_\Delta(z)$.

由定义易得

**引理 3**　(i) 在 $G$ 内, 若 $v(z)$ 是上调和的, 则 $v(z)\geqslant v_\Delta(z)$;

(ii) 在 $G$ 内, 若 $v(z)$ 是下调和的, 则 $v(z)\leqslant v_\Delta(z)$.

**引理 4**　如果 $v(z)$ 在 $G$ 内是上调和(对应地, 下调和)的, 那么 $v_\Delta(z)$ 也是上调和 (对应地, 下调和)的.

**证**　只证上调和的情形.

由于在 $\Delta$ 中 $v_\Delta(z)$ 是调和的, 而且在 $G\backslash\Delta$ 中 $v(z)=v_\Delta(z)$, 因此只要证明在 $\partial\Delta$ 上 $v_\Delta(z)$ 是上调和的即可. 事实上, 如果 $z_0\in\partial\Delta$, 取一足够小的正数 $r$ 使得 $O(z_0,r)\subset G$, 则根据引理 3,

$$v_\Delta(z_0)=v(z_0)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v_\Delta(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

根据定理 1, $v_\Delta$ 是上调和的. ▌

设 $f(\zeta)$ 是定义在 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上的有界函数，对 $\zeta_0\in\Gamma$，记

$$\bar{f}(\zeta_0)=\varlimsup_{\Gamma\ni\zeta\to\zeta_0} f(\zeta),\quad \underline{f}(\zeta_0)=\varliminf_{\Gamma\ni\zeta\to\zeta_0} f(\zeta).$$

易证 $\bar{f}$、$\underline{f}$ 分别为上、下半连续. 若在 $\Gamma$ 上 $m\leqslant f(\zeta)\leqslant M$，则在 $\Gamma$ 上也有 $m\leqslant\underline{f}\leqslant\bar{f}\leqslant M$；若 $f(\zeta)$ 在 $\zeta_0$ 连续，则

$$\underline{f}(\zeta_0)=\bar{f}(\zeta_0)=f(\zeta_0).$$

**定义 2** 设 $\psi(z)$、$\varphi(z)$ 是定义在 $G$ 内的函数. 若 $\psi$ 满足：

(i) 在 $G$ 内 $\psi(z)$ 连续且为上调和；和

(ii) $\varliminf_{G\ni z\to\zeta}\psi(z)\geqslant\bar{f}(\zeta)$，$\forall\,\zeta\in\Gamma$，

则称 $\psi(z)$ 是(关于 $f$ 的)<u>上函数</u>. 若 $\varphi(z)$ 满足：

(i) 在 $G$ 内 $\varphi(z)$ 连续且为下调和；和

(ii) $\varlimsup_{G\ni z\to\zeta}\varphi(z)\leqslant\underline{f}(\zeta)$，$\forall\,\zeta\in\Gamma$，

则称 $\varphi(z)$ 是(关于 $f$ 的)<u>下函数</u>.

显然 $\psi(z)\equiv M$ 是上函数，$\varphi(z)\equiv m$ 是下函数. 故上、下函数所成之集非空.

**定理 8** $\psi(z)\geqslant\varphi(z)$，其中 $\psi(z)$、$\varphi(z)$ 分别为上、下函数.

**证** 设 $\omega(z)=\psi(z)-\varphi(z)$，则 $\omega(z)$ 是连续且为上调和的. 显然在点 $\zeta\in\Gamma$ 处

$$\varliminf_{G\ni z\to\zeta}\omega(z)\geqslant\varliminf_{G\ni z\to\zeta}\psi(z)-\varlimsup_{G\ni z\to\zeta}\varphi(z)\geqslant\bar{f}(\zeta)-\underline{f}(\zeta)\geqslant 0,$$

则根据若极值原理，在 $G$ 内 $\omega(z)\geqslant 0$，即 $\psi(z)\geqslant\varphi(z)$. ▌

**定理 9** 若 $\psi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是上函数，则

$$\psi(z):=\min\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$$

是上函数. 若 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是下函数，则

$$\varphi(z):=\max\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$$

是下函数.

**证** 显然在 $G$ 内 $\psi(z)$是连续且为上调和的. 由于对 $\zeta\in\Gamma$，

$$\varliminf_{G \ni z \to \zeta} \psi_i(z) \geqslant \bar{f}(\zeta), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则

$$\varliminf_{G \ni z \to \zeta} \psi(z) \geqslant \bar{f}(\zeta).$$

所以 $\psi(z)$ 是上函数. 类似可证 $\varphi(z)$ 是下函数. ▌

**定理** 10　若 $\psi(z)$ 是上函数, 则 $\psi_1(z)$ 也是上函数; 若 $\varphi(z)$ 是下函数, 则 $\varphi_1(z)$ 也是下函数.

### 6. Dirichlet 问题、Perron 方法

对于 Riemann 曲面 $R$ 上相对紧的子区域 $G$, 设其边界为 $\partial G$. 若给定 $\partial G$ 上的连续实函数 $f$, 问是否存在 $\bar{G}:=G\cup\partial G$ 上的除有限点外的连续实函数 $u$, 使它在 $\partial G$ 上等于 $f$, 而在 $G$ 是内调和的? 这就是经典Dirichlet 问题. 关于圆域之边值的 Dirichlet 问题参看 § 2.3 Poisson 积分.

应当指出,对边界函数所加的条件"连续"显得过严. 放宽边界函数条件的 Dirichlet 问题更为有趣. 下面将用较一般的方法, 即 Perron 的方法来求解.

现在设 $f(\zeta)$ 是定义在 $\Gamma$ 上的有界函数, 且 $m\leqslant f(\zeta)\leqslant M$. 又设 $\mathscr{F}$ 是其相关的上函数 $\psi(z)$ 全体所成之族, 置

$$u(z) = \inf_{\psi\in\mathscr{F}} \psi(z),$$

则由于在 $\Gamma$ 上 $\varliminf_{G \ni z \to \zeta} \psi(z)\geqslant\bar{f}(\zeta)$, 故在 $G$ 内 $\psi(z)\geqslant m$, 从而在 $G$ 内也有 $u(z)\geqslant m$. 又因为 $\psi(z)\equiv M$ 是上函数, 所以

$$m \leqslant u(z) \leqslant M, \quad \forall\, z \in G.$$

**引理** 5　设 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是给定的 $G$ 中之点列. 则存在满足下面条件的上函数列 $\{\psi^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$:

(i) 在 $G$ 内, $\psi^{(1)}(z)\geqslant\psi^{(2)}(z)\geqslant\cdots\geqslant\psi^{(n)}(z)\geqslant\cdots$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^{(n)}(z_i)=u(z_i)\quad(i=1,2,\cdots)$.

**证** 根据 $u(z)$ 的定义，存在上函数列 $\{\psi_i^{(n)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \psi_i^{(n)}(z_i) = u(z_i), \quad i = 1,2,\cdots.$$

设

$$\psi^{(n)}(z) = \min_{1\leq i,k\leq n} \psi_i^{(k)}(z), \quad \forall\, z\in G,$$

则 $\psi^{(n)}(z)$ 是上函数. 根据定义可得

$$\psi^{(n)}(z) \geqslant u(z),$$

$$\psi^{(1)}(z) \geqslant \psi^{(2)}(z) \geqslant \cdots \geqslant \psi^{(n)}(z) \geqslant \cdots.$$

又因为当 $n\geqslant i$ 时 $\psi_i^{(n)}(z_i)\geqslant\psi^{(n)}(z_i)\geqslant u(z_i)$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(z_i) = u(z_i)\,(i = 1,2,\cdots). \quad \blacksquare$$

**引理 6** 设 $\Delta$ 是包含于 $G$ 中的圆盘，又设 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是给定的 $\Delta$ 中之点列. 则存在 $\Delta$ 内的调和函数 $U(z)$ 使得

$$U(z_i) = u(z_i),\ i = 1,2,\cdots.$$

**证** 设 $\psi^{(n)}(z)$是引理 5 的上函数，则 $\psi_\Delta^{(n)}(z)$为上函数，且

$$\psi_\Delta^{(1)}(z) \geqslant \psi_\Delta^{(2)}(z) \geqslant \cdots \geqslant \psi_\Delta^{(n)}(z) \geqslant \cdots,$$

$$\psi^{(n)}(z) \geqslant \psi_\Delta^{(n)}(z) \geqslant u(z).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \psi_\Delta^{(n)}(z_i) = u(z_i) \quad (i = 1,2,\cdots).$$

根据 Harnack 定理

$$U(z) := \lim_{n\to\infty} \psi_\Delta^{(n)}(z)$$

在 $\Delta$ 内调和，且 $U(z_i)=u(z_i)$， $i=1,2,\cdots$. $\blacksquare$

**定理 11** 设 $G$ 是以 $\Gamma$ 为其边界的 Riemann 曲面上的相对紧子区域，而 $f(\zeta)$是定义在 $\Gamma$ 上的有界函数，且 $m\leqslant f(\zeta)\leqslant M$. 又设 $\mathscr{F}$ 是其相关的上函数 $\psi(z)$ 全体所成之族，置

$$u(z) = \inf_{\psi\in\mathscr{F}} \psi(z),$$

则 $u(z)$ 是 $G$ 内的调和函数.

**证** 设 $\Delta$ 是包含于 $G$ 中的圆盘，而 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\Delta$ 中的有理点全体. 那么根据引理 6，存在 $\Delta$ 内的调和函数 $U(z)$ 使得

$$U(z_i) = u(z_i),\ i = 1,2,\cdots.$$

类似地，对于任意一 $\xi\in\Delta$，存在 $\Delta$ 上的调和函数 $V(z)$ 使得 $V(\xi)=u(\xi)$，且 $V(z_i)=u(z_i)$，$i=1,2,\cdots$. 所以 $V(z_i)=U(z_i)$，$i=1,2,\cdots$. 又由于 $V(z)$ 和 $U(z)$ 都是 $\Delta$ 内的调和函数，因此 $V(z)\equiv U(z)$，从而 $u(\xi)=V(\xi)=U(\xi)$. 即得 $u(z)\equiv U(z)$，所以 $u(z)$ 是 $\Delta$ 内的调和函数. ▌

称 $u_f(z):=u(z)$ 是以 $f$ 为边界值关于区域 $G$ 的<u>Dirichlet 问题的解</u>，简称为 $G$ 的<u>Dirichlet 解</u>.

同样，如果 $\mathscr{F}$ 是由下函数 $\varphi(z)$ 全体所成之族，并置

$$u(z) = \sup_{\varphi\in\mathscr{F}}\varphi(z),$$

则 $u(z)$ 是 $G$ 的调和函数.

## 7. 正则点

Dirichlet 解的边界性质与正则点的概念有着密切的关系.

**定义 3** 设 $G$ 是 Riemann 曲面的子区域，而 $\Gamma$ 是其非空边界. 对于 $\zeta_0\in\Gamma$，记 $G_{\rho_0}=G\cap O(\zeta_0,\rho_0)$ $(\rho_0>0)$. 若在 $G_{\rho_0}$ 上存在函数 $\Omega(z)$ 满足：

(i) $\Omega(z)>0$，并在 $G_{\rho_0}$ 内是连续且为上调和的；

(ii) $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0}\Omega(z)=0$；和

(iii) 对任一 $\rho\in(0,\rho_0)$，存在 $a:=a(\rho)>0$，使得

$$\Omega(z)\geqslant a,\quad \forall\, z\in G\cap\{z\,|\,|z-\zeta_0|=\rho\},$$

则称 $\Omega(z)$ 是点 $\zeta_0$ 的<u>垒函数</u>，简称为<u>垒</u>.

设 $u(z)$ 是 $G$ 的关于边界值 $f$ 的 Dirichlet 解. 对 $\zeta\in\Gamma$，记

$$\underline{u}(\zeta) = \varliminf_{G\ni z\to\zeta} u(z),\quad \overline{u}(\zeta) = \varlimsup_{G\ni z\to\zeta} u(z).$$

若 $\overline{u}(\zeta)=\underline{u}(\zeta)$，则 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta} u(z)$ 存在.

**定理 12** 若 $\zeta_0\in\Gamma$ 存在垒，则

$$\underline{f}(\zeta_0) \leqslant \underline{u}(\zeta_0) \leqslant \bar{u}(\zeta_0) \leqslant \bar{f}(\zeta_0).$$

因此，若 $f$ 在 $\zeta_0$ 连续，则 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} u(z)=f(\zeta_0)$，其中 $u(z)$ 是 $G$ 的关于边界值 $f$ 的 Dirichlet 解.

**证** 对于正数 $\rho$，记 $G_\rho=G\cap O(\zeta_0,\rho)$、$\Gamma_\rho=\Gamma\cap\overline{O(\zeta_0,\rho)}$. 由于 $\underline{f}(\zeta)$ 是下半连续的，而 $\bar{f}(\zeta)$ 是上半连续的，故对任意 $\varepsilon>0$，存在正数 $\rho:=\rho(\varepsilon)$ 使

$$\underline{f}(\zeta_0)-\varepsilon \leqslant \underline{f}(\zeta) \leqslant \bar{f}(\zeta) \leqslant \bar{f}(\zeta_0)+\varepsilon, \quad \forall\, \zeta \in \Gamma_\rho \tag{1}$$

在 $G$ 中定义函数

$$w(z)=\begin{cases} \min(c\Omega(z),1), & \text{当 } z\in G_\rho, \\ 1, & \text{当 } z\in G\setminus G_\rho. \end{cases}$$

其中 $c>0$ 是使得 $c\alpha(\rho)\geqslant 1$ 的常数. 则在 $G$ 内 $w(z)$ 是连续的且 $0<w(z)\leqslant 1$、 当 $|z-\zeta_0|=\rho$ 时 $w(z)=1$、 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} w(z)=0$. 易证在 $G$ 内 $w(z)$ 为上调和的.

显然，函数

$$\varphi(z):=\underline{f}(\zeta_0)-\varepsilon-kw(z) \qquad (k>0) \tag{2}$$

在 $G$ 内为下调和的. 由于 $w(z)>0$，从(1)可得

$$\varlimsup_{z\to\zeta}\varphi(z)\leqslant \underline{f}(\zeta_0)-\varepsilon\leqslant \underline{f}(\zeta), \quad \forall\, \zeta\in\Gamma_\rho$$

又因在 $G_\rho$ 外 $w(z)=1$，根据(2)，可选取 $k$ 足够大使得

$$\varlimsup_{z\to\zeta}\varphi(z)\leqslant \underline{f}(\zeta), \quad \forall\, \zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_\rho$$

因此在 $\Gamma$ 上 $\varlimsup\limits_{z\to\zeta}\varphi(z)\leqslant\underline{f}(\zeta)$. 故 $\varphi(z)$ 是下函数.

类似地，如果 $k$ 足够大，函数

$$\psi(z):=\bar{f}(\zeta_0)+\varepsilon+k\,w(z) \qquad (k>0) \tag{3}$$

是上函数.

由于 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} w(z)=0$，由(2)得 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0}\varphi(z)=\underline{f}(\zeta_0)-\varepsilon$. 故只要选取 $\rho_1<\rho$ 足够小即可得

$$\varphi(z)>\underline{f}(\zeta_0)-2\varepsilon, \quad \forall\, z\in G_{\rho_1}.$$

由 $u(z)$ 的定义得 $u(z)\geqslant\varphi(z)$，因此

$$u(z) > \underline{f}(\zeta_0) - 2\varepsilon, \quad \forall\, z \in G_{\rho_1}.$$

即有 $\underline{u}(\zeta_0)\geqslant\underline{f}(\zeta_0)-2\varepsilon$，由 $\varepsilon$ 的任意性得

$$\underline{u}(\zeta_0) \geqslant \underline{f}(\zeta_0).$$

另，由 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0}\psi(z)=\bar{f}(\zeta_0)+\varepsilon$ 和 $u(z)\leqslant\psi(z)$ 可得 $\bar{u}(\zeta_0)\leqslant\bar{f}(\zeta_0)+\varepsilon$. 再由 $\varepsilon$ 的任意性得 $\bar{u}(\zeta_0)\leqslant\bar{f}(\zeta_0)$. 故得

$$\underline{f}(\zeta_0) \leqslant \underline{u}(\zeta_0) \leqslant \bar{u}(\zeta_0) \leqslant \bar{f}(\zeta_0). \quad \blacksquare$$

**定义 4** 设 $\varphi(\zeta)$ 是相对紧区域 $G$ 的边界 $\Gamma$ 上定义的函数，记 $u_\varphi(z)$ 是 $G$ 的以 $\varphi(\zeta)$ 为边值的 Dirichlet 问题的解. 若对所有在 $\zeta_0\in\Gamma$ 上连续的函数 $f(\zeta)$，

$$\lim_{z\to\zeta_0} u_f(z) = f(\zeta_0)$$

都成立，则称 $\zeta_0$ 为<u>正则点</u>，否则称为<u>非正则点</u>.

由定理 11 立即可得

**定理 13** 设 $\zeta_0\in\Gamma$. 若在 $\zeta_0$ 存在垒，则 $\zeta_0$ 是正则点.

**定理 14** 设 $\zeta_0\in\Gamma$. 若存在一连续统 $e$ 使 $\zeta_0\in e\subset\Gamma$，则在 $\zeta_0$ 存在垒，从而 $\zeta_0$ 是正则点.

**证** 设 $0<\rho<1$. 记 $z-\zeta_0=x+iy$. 对 $z\in G_\rho:=G\cap O(\zeta_0,\rho)$，置 $\log(z-\zeta_0)=p(x,y)+iq(x,y)$，则在 $G_\rho$ 内 $p(x,y)<0$. 据假设，可选取 $\rho$ 足够小使得 $\log(z-\zeta_0)$ 在 $G_\rho$ 内是单值的. 则函数

$$\Omega(z):=\mathbf{Re}\left(\frac{-1}{\log(z-\zeta_0)}\right)=\frac{-p}{p^2+q^2}>0$$

满足垒的条件，所以在 $\zeta_0$ 存在垒，故 $\zeta_0$ 为正则点. $\blacksquare$

作为特殊情形，有

**定理 15** 设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一个相对紧好子域，其边界 $\Gamma$ 由有限条解析曲线组成. 又设 $f(\zeta)$ 是给定的 $\Gamma$ 上的连续函数，则存在 $G$ 内的调和函数，以 $f$ 为其边界值.

**定理 16** 设 $G$ 是 $z$-平面上的有界区域，$\Gamma$ 是其边界. 对于点 $\zeta_0\in\Gamma$，记 $G_{\rho_0}=G\cap O(\zeta_0,\rho_0)$ $(\rho_0>0)$. 若在 $G_{\rho_0}$ 上存在连续正上调和函数 $w(z)>0$ 使得 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} w(z)=0$，则在点 $\zeta_0$ 处存在垒，故 $\zeta_0$ 为正则点.

**证** 置 $K=\max\limits_{\zeta\in\Gamma}|\zeta-\zeta_0|$、$\gamma_\rho=\{z\,|\,|z-\zeta_0|=\rho\}$ $(0<\rho<\rho_0)$，记 $\gamma_\rho^*=\gamma_\rho\cap G$. 取 $\gamma_\rho^*$ 的一闭子集 $e$ 使得

$$\mathrm{mes}(\gamma_\rho^*-e)\leqslant\frac{2\pi\rho^2}{K}, \tag{1}$$

其中 mes 表示线性测度. 又置

$$\min_{z\in e} w(z)=m>0. \tag{2}$$

设 $v(z)$ 是圆盘 $O(\zeta_0,\rho)$ 内的调和函数使其边值为

$$\left.\begin{aligned} v(\zeta)&=K, &&\forall\,\zeta\in\gamma_\rho^*-e\\ v(\zeta)&=0, &&\forall\,\zeta\in\gamma_\rho-(\gamma_\rho^*-e). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

则

$$0<v(\zeta_0)\leqslant K\,\frac{\mathrm{mes}(\gamma_\rho^*-e)}{2\pi\rho}\leqslant\rho. \tag{4}$$

又设 $f(\zeta)=|\zeta-\zeta_0|$ $(\zeta\in\Gamma)$，则在 $\Gamma$ 上 $0\leqslant f\leqslant K$. 为方便，记 $G_\rho=G\cap O(\zeta_0,\rho)$、$\Gamma_\rho=\Gamma\cap G_\rho$. 设 $\varphi(z)$ 是关于 $f$ 的下函数. 由于在 $\Gamma$ 上 $\overline{\lim\limits_{G\ni z\to\zeta}}\,\varphi(z)\leqslant f(\zeta)\leqslant K$，故在 $G$ 内 $\varphi(z)\leqslant K$ 且

$$\overline{\lim_{G\ni z\to\zeta}}\,\varphi(z)\leqslant\rho,\quad \forall\,\zeta\in\Gamma_\rho. \tag{5}$$

将关于 $f$ 的下函数 $\varphi(z)$ 之全体记为 $\mathscr{F}$ 并置

$$u(z)=\sup_{\varphi\in\mathscr{F}}\varphi(z). \tag{6}$$

那么 $u(z)$ 在 $G$ 内 $0\leqslant u(z)\leqslant K$，且 $u(z)$ 为下调和的.

又由于 $|z-\zeta_0|$ 既是下调和函数也是下函数，故

$$|z-\zeta_0|\leqslant u(z)\leqslant K,\quad \forall\,z\in G. \tag{7}$$

显然函数

$$\omega(z) := \varphi(z) - \rho - \frac{Kw(z)}{m} - v(z) \tag{8}$$

在 $G_\rho$ 内是下调和的. 又因 $w(z)>0$ 且 $v(z)>0$,根据(5)有

$$\overline{\lim_{G\ni z\to\zeta}}\,\omega(z) \leqslant 0, \quad \forall\, \zeta \in \Gamma_\rho \tag{9}$$

若 $z\in\gamma_\rho^*-e$, 则 $v=K$ 且 $\varphi\leqslant K$. 所以 $\omega\leqslant 0$. 又若 $z\in e$, 则 $\varphi\leqslant K$ 且 $\frac{Kw}{m}\geqslant K$. 所以 $\omega\leqslant 0$. 由此可见在 $G_\rho$ 的边界上 $\overline{\lim\limits_{G\ni z\to\zeta}}\,\omega(z)\leqslant 0$. 所以在 $G_\rho$ 内 $\omega(z)\leqslant 0$,即得

$$\varphi(z) \leqslant \rho + \frac{Kw(z)}{m} + v(z), \quad \forall\, z \in G_\rho.$$

因此根据(6)有

$$u(z) \leqslant \rho + \frac{Kw(z)}{m} + v(z), \quad \forall\, z \in G_\rho. \tag{10}$$

又由于 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} w(z)=0$ 和 $v(\zeta_0)\leqslant\rho$,则有 $\overline{\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0}}\,u(z)\leqslant 2\rho$ .

由 $\rho>0$ 的任意性可得 $\lim\limits_{G\ni z\to\zeta_0} u(z)=0$. 因此由(7)即知 $u(z)$是点 $\zeta_0$ 处的垒函数. ▌

定理定理 16 说明垒的定义之条件 iii)不是必要的.

## 8. 可数基及穷尽列的存在

前面讨论 Dirichlet 问题解的存在性时，要求 Riemann 曲面 $R$ 的子区域 $G$ 是相对紧的. 然而，Perron 方法可用于更为一般的情形. 事实上，可将区域 $G$ 嵌入一紧致的 Hausdorff 空间，比如 $R$ 的 Alexandroff 紧致化. 于是 $G$ 关于紧致化空间的边界 $\Gamma$ 是紧致的. 仔细验证即可发现，前面的证明过程只用到边界 $\Gamma$ 的性质.

特别，设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 挖去某个参数邻域后所得的区域，则它关于紧致化空间的边界由紧致的解析 Jordan 曲线 $\alpha$ 和单点(理想边界)$\beta$ 组成. 如果取边界函数 $f$ 使得它在 $\alpha$ 上是非常数连续的、而在单点 $\beta$ 处取常数，那么 $D$ 的关于 $f$ 的 Dirichlet 问

题解 $u$ 的存在. 由于 $\alpha$ 的每一点都是正则点，所以 $u$ 在 $\alpha$ 上的边界值就是 $f$，从而是非常数的. 于是有

**定理** 17 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 关于某个参数邻域的余集，则 $D$ 上存在非常数单值调和函数.

现在，可以利用 Dirichlet 问题解的存在性引进开 Riemann 曲面的穷尽列的概念. 下面先从可数基的存在性着手.

**定理** 18 Riemann 曲面 $R$ 上非常数单值调和函数 $u$ 的存在蕴含着 $R$ 具有可数基.

**证** 设 $R_\infty$ 是 $R$ 的万有覆盖面. 则在 $R_\infty$ 上 $u$ 的共轭调和函数 $u^*$ 是单值的. 于是解析函数 $u+iu^*$ 将 $R_\infty$ 定义为复平面的一个覆盖面. 根据第一章 §2 定理 7，$R_\infty$ 是可数的，故它的投影 $R$ 也是可数的. ▌

利用开 Riemann 曲面 $R$ 的可数性可以构造满足下列条件的子区域列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$：对每个自然数 $n$，

(1) 区域 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由 $R$ 上的有限条紧致解析曲线组成；

(2) $\overline{R}_n := R_n \cup \Gamma_n \subset R_{n+1}$；

(3) $R \backslash R_n$ 的任一个分支都是非(相对)紧的；

(4) $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$.

**定义** 5 开 Riemann 曲面 $R$ 的满足条件 (1)-(4)的正则子区域列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 $R$ 的一个<u>穷尽(列)</u>.

**定理** 19 任何开 Riemann 曲面都存在穷尽列.

**证** 设已给出 Riemann 曲面 $R$ 的一个由参数圆组成的可数复盖族 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$. 取 $G_1=V_1$. 设 $\{G_i\}_{i=1}^{k}$ 和自然数 $\{n_i\}_{i=1}^{k}$ 已取好使得 $n_{i+1}>n_i (i=1,2,\cdots,k-1)$ 且下面条件成立：

(a) $G_i = V_1 \cup \cdots \cup V_{n_i}$；  (b) $\overline{G}_{i-1} \subset G_i$, $2 \leqslant i \leqslant k$.

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n=R\supset\overline{G_k}$，则存在复盖$\overline{G_k}$的$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$的有限子族. 不妨设该子族包含 $V_1$、…、$V_{n_k+1}$. 取

$$n_{k+1}=\min\{n_j\mid \overline{G_k}\subset\bigcup_{n=1}^{n_j}V_n,\quad n_j\geqslant n_k+1\},\qquad G_{k+1}=\bigcup_{n=1}^{n_{k+1}}V_n.$$

根据归纳法，子域列 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 已取好且满足条件(a)和(b)，且显然有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=R$.

注意到只需采取必要的规范化手续就可使每个 $G_k$ 的边界 $\Gamma_k$ 是由有限个弧段组成的简单闭曲线. 为简便起见，不去改变所用的记号.

集 $G_{k+1}\setminus\overline{G_k}$ 以 $\Gamma_{k+1}\cup\Gamma_k$ 为边界. 现对其每个分支讨论 Dirichlet 问题可得对应的解 $u_k$ 使其在 $\Gamma_k$ 上取值 0，在 $\Gamma_{k+1}$ 上取值 1. 又在 $G_k$ 上补充定义 $u_k=0$. 对任意常数 $\eta_k\in(0,1)$，集 $W_k:=\{z|u_k<\eta_k\}$ 是开集，且$\overline{W_k}\subset W_{k+1}$. 显然$\overline{G_k}\subset W_k\subset G_{k+1}$，由此可得 $\bigcup_{k=1}^{\infty}W_k=R$.

下面证明，只要适当选择数 $\eta_k$ 就能使 $W_k$ 的每个分支都是正则嵌入. 设 $\Omega$ 是 $G_{k+1}\setminus\overline{G_k}$ 的一个分支，其边界一部分在 $\Gamma_k$ 上、一部分在 $\Gamma_{k+1}$ 上，则 $u_k$ 在 $\Omega$ 内是非常数的. 由于方程 $\frac{\partial u_k}{\partial x}-\frac{\partial u_k}{\partial y}=0$ 具有不变性，且满足方程的点必为弧立点，因此可以选择 $\eta_k$ 使得等位线 $u_k=\eta_k$ 不通过任何这类点. 设 $z_0$ 是等位线 $u_k=\eta_k$ 上的一点，在 $z_0$ 的邻域内取一共轭函数 $u_k^*$. 置 $f(z)=-\mathrm{i}(u_k-\eta_k)+u_k^*$，则 $f(z)$ 是解析的且 $f'(z)\neq0$. 因此，必存在 $z_0$ 的一个邻域 $V$ 使得 $f(z)$ 在其上是一对一的，且 $\mathrm{Im}\,f(z)=0$ 当且仅当 $z\in V\cap\Gamma_k$. 根据定义，这意味着 $W_k$ 是正则嵌入.

但是，$W_k$ 未必连通. 然而，若以包含 $V_1$ 的分支代替 $W_k$，再将 $R\setminus W_k$ 的紧致分支都包含进来，就可得正则区域的穷尽. ▌

**推论**　$R$ 的每一紧集 $A$ 都包含在其一正则区域内.

事实上设 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ 形成 $A$ 的一个开复盖，推论是 $A$ 紧致性的直接结果. 然而，这里必须指出推论可以不用可数性且易证明之. 为此，将 $A$ 包含在一由有限个参数圆组成的相对紧致区域 $G_1$ 中，再将 $\overline{G_1}$ 包含在类似的区域 $G_2$ 中. 用类似上面的构造法可得到一正则区域 $W_1$ 使得 $G_1\subset W_1\subset G_2$.

这里特别指出，任一 Riemann 曲面 $R$ 的紧集 $A$ 都可视为是某一紧致 Riemann 曲面的子集，为此只要将包含 $A$ 的正则好子域沿其边界做 Schottky 双倍即可(参看 §1.2).

## §4　Green 函数

### 1.　相对紧区域上的 Green 函数

设 $D$ 是覆盖在复 $z$-球面 $K$ 上的 Riemann 曲面 $R$ 上的一个相对紧的子区域，其关于 $R$ 的相对边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交 Jordan 曲线组成：$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$. 对某点 $a\in D$，将满足下面条件(i)～(iii)的函数 $g(z,a)$ 称为 $D$ 的以 $a$ 为极的Green 函数：

(i) $g(z,a)$ 在 $D\backslash\{a\}$ 内调和；

(ii) $g(z,a)=\log\dfrac{1}{|z-a|}+\omega(z)$，其中 $\omega(z)$ 在 $a$ 点调和；

(iii) $g(z,a)=0$，当 $z\in\Gamma$.

下面定理指出 Green 函数具有对称性.

**定理 1**　若区域 $D$ 存在 Green 函数 $g$，则

$$g(b,a)=g(a,b),\ \forall\ a、b\in D.$$

**证**　设 $\Gamma_\delta$ 是等位线 $\{z\,|\,g(z,a)=\delta\}$ $(\delta>0)$. 那么 $\Gamma_\delta$ 是区域

$D_\delta:=\{z|g(z,a)>\delta\}$ 的相对边界，且 $\Gamma_\delta$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 显然当 $\delta\to0$ 时 $\Gamma_\delta\to\Gamma$. 由 Green 公式

$$\int_{\Gamma_\delta}\frac{\partial g(z,a)}{\partial v}\,ds=2\pi, \tag{1}$$

其中 $v$ 是 $\Gamma_\delta$ 关于 $D_\delta$ 的内法向.

现在选取 $\delta$ 足够小使得 $b\in D_\delta$，且在 $\Gamma_\delta$ 上 $0<g(z,b)<\varepsilon$，其中当 $\delta\to0$ 时 $\varepsilon\to0$. 先将 Green 公式 $\int\left(u\frac{\partial v}{\partial v}-v\frac{\partial u}{\partial v}\right)ds=0$ 应用于函数 $u=g(z,a)$，$v=g(z,b)$ 及由 $\Gamma_\delta$ 和两个以 $a$、$b$ 为心的小圆周 $C_a$、$C_b$ 围成的区域，然后令 $C_a$、$C_b$ 的半径趋于 0，则可得

$$g(a,b)-g(b,a)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\delta}\left(g(z,a)\frac{\partial g(z,b)}{\partial v}-g(z,b)\frac{\partial g(z,a)}{\partial v}\right)ds.$$

又

$$\int_{\Gamma_\delta}g(z,a)\frac{\partial g(z,b)}{\partial v}\,ds=\delta\int_{\Gamma_\delta}\frac{\partial g(z,b)}{\partial v}\,ds=2\pi\delta,$$

$$0<\int_{\Gamma_\delta}g(z,b)\frac{\partial g(z,a)}{\partial v}\,ds<\varepsilon\int_{\Gamma_\delta}\frac{\partial g(z,a)}{\partial v}\,ds=2\pi\varepsilon,$$

令 $\delta\to0$，$\varepsilon\to0$ 即得 $g(b,a)=g(a,b)$. ▌

下面证明 Green 函数的存在性. 为此先证明：

**引理 1** 设 $u(z)$ 是圆盘 $O(0,\rho)$ 内的调和函数. 记 $z=x+iy$. 若当 $y>0$ 时 $u>0$，而当 $y=0$ 时 $u=0$，则 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z=0}>0$.

**证** 设 $u(re^{i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta$，则 $a_1=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z=0}\geqslant0$.

假设 $a_1=0$，那么必有自然数 $k\geqslant2$ 是使得 $a_2=\cdots=a_{k-1}=0$ 且 $a_k\neq0$ 成立. 由于当 $0<\theta<\pi/k$ 时 $\sin k\theta>0$，而当 $\pi/k<\theta<2\pi/k$ 时 $\sin k\theta<0$，故若 $r_0$ 足够小时存在 $\theta_0\in(0,\pi)$ 使得 $u(r_0e^{i\theta_0})<0$. 矛盾. 所以 $a_1>0$. ▌

**定理** 2 设 $D$ 是覆盖在复 $z$-球面 $K$ 上的 Riemann 曲面 $R$ 的相对紧的子域，其(相对)边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交的解析 Jordan 曲线组成：$\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Gamma_i$. 则区域 $D$ 存在 Green 函数 $g(z,a)$.

**证** 不妨设 $a=0$. 设正数 $1>r_0>r_1>\cdots>r_n\to 0\ (n\to\infty)$，并记 $C_n=\{z\,|\,|z|=r_n\}$、$G_n=O(0,r_n)$. 假设 $\bar{G}_0\subset D$.

设 $u_n$ 是 $D\backslash G_n$ 上的调和函数，使得

$$u_n(z)=\begin{cases}0, & \forall\, z\in\Gamma;\\ \log\dfrac{1}{r_n}, & \forall\, z\in C_n.\end{cases} \tag{1}$$

现在，在区域 $D\backslash G_0$ 上将 Green 公式应用于函数 $u_n$、$u_0$. 由于在 $\Gamma$ 上 $u_n=0$、$u_0=0$，则

$$\int_{C_0}\left(u_n\frac{\partial u_0}{\partial r}-u_0\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s=0,\quad r=|z|.$$

所以

$$\int_{C_0}u_n\left(-\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\mathrm{d}s=\log\frac{1}{r_0}\int_{C_0}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s. \tag{2}$$

类似地，在 $C_n$ 和 $C_0$ 所围的圆环域 $G_0\backslash G_n\cup C_n$ 上将 Green 公式应用于函数 $u_n$、$\log\frac{1}{r}$ 可得

$$\int_{C_0}\left(u_n\frac{\partial\log 1/r}{\partial r}-\log\frac{1}{r_0}\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s=\int_{C_n}\left(u_n\frac{\partial\log 1/r}{\partial r}-\log\frac{1}{r_n}\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s,$$

因此

$$\begin{aligned}-\frac{1}{r_0}\int_{C_0}u_n\,\mathrm{d}s-\log\frac{1}{r_0}\int_{C_0}\frac{\partial u_n}{\partial r}\,\mathrm{d}s &=-2\pi\log\frac{1}{r_n}-\log\frac{1}{r_n}\int_{C_n}\frac{\partial u_n}{\partial r}\mathrm{d}s\\ &=-2\pi\log\frac{1}{r_n}-\log\frac{1}{r_n}\int_{C_0}\frac{\partial u_n}{\partial r}\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

所以

$$\left(\log\frac{1}{r_n}-\log\frac{1}{r_0}\right)\int_{C_0}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s$$

$$= 2\pi \log \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_0}\int_{C_0} u_n \mathrm{d}s < 2\pi \log \frac{1}{r_n},$$

且 $\int_{C_0}\left(-\frac{\partial u_n}{\partial r}\right)\mathrm{d}s \leqslant \frac{2\pi \log 1/r_n}{\log r_0/r_n} \leqslant \frac{2\pi \log 1/r_1}{\log r_0/r_1} \quad (n \geqslant 1).$

记 $A=\frac{\log 1/r_0 \log 1/r_1}{\log r_0/r_1}$. 根据(2),

$$\int_{C_0} u_n\left(-\frac{\partial u_0}{\partial r}\right)\mathrm{d}s \leqslant 2\pi A \qquad (n \geqslant 1). \tag{3}$$

根据引理 1,通过适当的线性变换即可知存在一常数 $b>0$ 使得在 $C_0$ 内 $-\frac{\partial u_0}{\partial r} \geqslant b$. 若置

$$m_n = \min_{z\in C_0} u_n(z), \tag{4}$$

并记 $B=\frac{A}{b\, r_0}$, 则根据(3)即有

$$m_n \leqslant B \quad (n \geqslant 1). \tag{5}$$

记 $\Delta_\rho=\overline{O(0,\rho)}(0<\rho<r_0)$、$D_\rho^*=D\backslash\Delta_\rho$. 由于 $u_n>0$, 根据(5)及推广的 Harnack 不等式,存在仅依赖于 $\rho$ 的常数 $K(\rho)$ 使得

$$0 < u_n(z) \leqslant K(\rho), \quad \forall\, z \in D_\rho^*, \forall\, n \geqslant n_0. \tag{6}$$

于是,对应式(6),通过适当选取数列 $\rho_1>\rho_2>\cdots>\rho_v\to 0\ (v\to\infty)$, 即可以取 $\{u_n(z)\}$ 的一子列, 仍用原记号, 使得极限

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \tag{7}$$

存在, 且其收敛在 $D\backslash\{0\}$ 上是广义一致的. 显然 $u(z)$ 在 $D\backslash\{0\}$ 内是调和的. 下面将证明在 $\Gamma$ 上 $u=0$.

根据(6), 可设存在常数 $K$ 使得

$$0 < u_n(z) \leqslant K, \quad \forall\, z \in C_0\ (n = 0,1,2,\cdots), \tag{8}$$

则 $K \geqslant \log 1/r_0$. 由最大值原理可得

$$0 < u_n(z) \leqslant K\frac{u_0(z)}{\log 1/r_0}, \quad \forall\, z \in D\backslash G_0,$$

所以

$$0 < u(z) \leqslant K \frac{u_0(z)}{\log 1/r_0}, \quad \forall z \in D \backslash G_0. \tag{9}$$

从而，由于在 $\Gamma$ 上 $u_0=0$ 即得在 $\Gamma$ 上 $u=0$.

下面将证明 $u(z)-\log 1/r$ 在 $z=0$ 处调和.

由于在 $C_n$ 上 $u(z)-\log 1/r=0$，则关系式

$$\left|u_n(z)-\log\frac{1}{r}\right| \leqslant \max_{z\in C_0}\left|u_n(z)-\log\frac{1}{r}\right| \leqslant K-\log\frac{1}{r} \leqslant K,$$

在 $C_n$ 和 $C_0$ 所界的开圆环 $G_0\backslash(G_n\cup C_n)$ 上成立. 所以

$$\left|u(z)-\log\frac{1}{r}\right| \leqslant K \quad 当 \quad 0<|z|\leqslant r_0.$$

由此可见 $u(z)-\log 1/r$ 在 $z=0$ 处调和. 从而 $u(z)=g(z,0)$ 是区域 $D$ 的以 $z=0$ 为极的 Green 函数. ▌

**注** 关于 $\{\Gamma_i\}$ 为非解析曲线的一般情形，虽然可直接证明 Green 函数的存在性，但为方便起见，将其放在后面的定理 4.

## 2. 开 Riemann 曲面的 Green 函数

设 $R$ 是一覆盖在 $z$-球面上的开 Riemann 曲面，$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一个穷尽列，其中 $\overline{R_n}\subset R_{n+1}$ 且 $R_n$ 的相对边界 $\Gamma_n$ 是由有限条解析 Jordan 曲线组成. 设 $a\in R_0$，$g_n(z,a)$ 是 $R_n$ 上以 $a$ 为极的 Green 函数. 根据极大值原理，在 $R_n$ 上有 $g_n(z,a)<g_{n+1}(z,a)$. 所以根据 Harnack 原理有

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z,a)\equiv+\infty$ 或

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z,a)=g(z,a)<+\infty$ ($\forall z\neq a$)

存在，且其收敛在 $R$ 上为广义一致的.

如果情形 (i) 发生时，那么说 <u>$R$ 不存在 Green 函数</u>.

情形 (ii) 中的 $g(z,a)$ 称为 $R$ 的<u>Green 函数</u>. 此时，$g(z,a)$ 在 $R$ 上除点 $a$ 外是调和的；且若置

$$g(z,a)=\log\frac{1}{|z-a|}+\omega(z), \qquad (*)$$

则 $\omega(z)$ 在 $a$ 调和，称 $\omega(a)$ 为 $R$ 在 $a$ 点的Robin 常数.

必须说明，情形 (i)和 (ii)的发生与 $a$ 点选择无关. 事实上，设 $a\neq b$ 是 $R$ 上的两点，取第三点 $z_0\in R$. 据 Harnack 原理，存在不依赖 $n$ 的两个常数 $A$、$B>0$ 使

$$Ag_n(z_0,a)\leqslant g_n(z_0,b)\leqslant Bg_n(z_0,a).$$

则

$$A\lim_{n\to\infty}g_n(z_0,a)\leqslant\lim_{n\to\infty}g_n(z_0,b)\leqslant B\lim_{n\to\infty}g_n(z_0,a).$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(z_0,b)=\infty$ 或 $<\infty$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(z_0,a)=\infty$ 或 $<\infty$ 一致.

设开 Riemann 曲面 $R_1$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的子曲面. 由定义易证：若 $R$ 存在 Green 函数，则 $R_1$ 也存在 Green 函数.

**定理 3**　设开 Riemann 曲面 $R$ 是 Riemann 曲面 $R^*$ 的子曲面. 又设 $R$ 存在 Green 函数 $g(z,a)$. 如果在 $R$ 关于 $R^*$ 的边界点 $\zeta$ 存在垒函数，那么

$$\lim_{R\ni z\to\zeta}g(z,a)=0.$$

**证**　设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽，其中每个 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 设 $g_n(z,a)$ 是 $R_n$ 的 Green 函数. 置 $\Delta_\rho=O(\zeta,\rho)$ $(0<\rho\leqslant\rho_0)$，其中 $\rho_0$ 足够小使得 $\Delta_\rho$ 在 $\zeta$ 的参数邻域内且不包含 $a$. 记 $R(\rho)=R\cap\Delta_\rho$、$R_n(\rho)=R_n\cap\Delta_\rho$. 设 $\Omega(z)$ 是 $R(\rho)$ 在点 $\zeta$ 处的垒函数(参看 § 3.7)满足条件：

(1) $\Omega(z)>0$，并在 $R(\rho)$ 内是连续且为上调和的；

(2) $\lim\limits_{R\ni z\to\zeta}\Omega(z)=0$；

(3) 在 $R\cap\{z\,|\,|z-\zeta|=\rho\}$ 上 $\Omega(z)\geqslant a(\rho)>0$.

设在 $R_n(\rho)$ 内 $g_n(z,a)\leqslant K$ $(n=1,2,\cdots)$. 由于在 $\Gamma_n$ 上 $g_n=0$，根据(1)和极值原理，

$$\Omega(z)\geqslant a(\rho)g_n(z,a)/K, \quad \forall\, z\in R_n(\rho),$$

所以 $\Omega(z)\geqslant a(\rho)g(z,a)/K$, $\forall z\in R(\rho)$. 因此

$$\lim_{R\ni z\to\zeta} g(z,a)=0.$$ ▌

**引理 2** 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的子区域. 若存在 $R$ 的包含 $D$ 的相对紧子区域 $G$, 其关于 $R$ 的相对边界由有限条互不相交的解析 Jordan 曲线组成, 则区域 $D$ 存在 Green 函数.

**证** 首先, 根据定理 1, $G$ 存在 Green 函数 $g^*(z,a)$, $a\in D_0$.

其次, 设 $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $D$ 的一穷尽, 其中每个 $D_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 不妨设 $a\in D_0$. 设 $g_n(z,a)$ 是 $D_n$ 的 Green 函数, 则根据最大值原理, $g_n(z,a)<g_{n+1}(z,a)<g^*(z,a)$. 所以下面极限存在, 且其收敛在 $D$ 上为广义一致的:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(z,a)=g(z,a)\quad (z\neq a).$$

显然 $g(z,a)$ 是 $D$ 的 Green 函数. ▌

**定理 4** 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的相对紧的子域. 若其边界由有限条互不相交的 Jordan 曲线组成, 则 $D$ 存在 Green 函数.

**证** 利用穷尽列可知存在边界由有限条解析 Jordan 曲线组成的 $R$ 的相对紧的子域 $D^*$ 使得 $\bar{D}\subset D^*\subset R$. 于是由定理 3 和引理 2 即得结论. ▌

**定理 5** 设 $F$ 是紧 Riemann 曲面. 则 $F$ 上不存在满足下面条件的函数 $u(z,a)$:

(1) 除去点 $a$ 外在 $F$ 上 $u(z,a)$ 关于变量 $z$ 是调和的;

(2) 若置 $u(z,a)=\log\dfrac{1}{|z-a|}+\omega(z)$, 则 $\omega(z)$ 在 $a$ 点调和.

**证** 假设 $F$ 上存在满足条件 (1)和(2)的函数 $u(z,a)$. 将圆盘 $O(a,\rho)(\rho>0)$ 的圆周边界记为 $C$. 则

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial v}\,ds=2\pi,$$

其中 $v$ 是 $C$ 的关于 $O(a,\rho)$ 的内法向. 但由于 $u$ 在 $F\backslash O(a,\rho)$ 内是

调和的，故 $\int_C \frac{\partial u}{\partial v} ds = 0$．矛盾． ▌

将不存在 Green 函数的全体开 Riemann 曲面组成之类记为 $O_G$. 为方便，紧 Riemann 曲面也归属 $O_G$，定理 5 说明这样做是合理的. 若开 Riemann 曲面 $R \in O_G$，则说 $R$ 具有零理想边界，否则说 $R$ 具有正理想边界.

**注**　Green 函数是共形不变的：设 $f$ 是将开 Riemann 曲面 $\tilde{R}$ 共形映上 $R$ 的同胚映照，如果将 $R$ 的 Green 函数记为 $G(z,\zeta)$，那么 $G(\tilde{z},\tilde{\zeta})$ 是 $\tilde{R}$ 的 Green 函数，其中 $\tilde{z}=f(z)$、$\tilde{\zeta}=f(\zeta)$.（证明略）

### 3.　Green 函数的理想边界取值

开 Riemann 曲面的 Green 函数趋于理想边界时并非都取极限值 0，例如单位圆盘 $O(0,1)$ 挖去点 $z=a$ $(0<|a|<1)$ 所得的区域之 Green 函数为 $G(z,0)=\frac{1}{|z|}$，它当 $z\to a$ 不趋于 0.

但是，可以证明，如果 $R$ 是复平面的一个单连通有界域，那么 $R$ 的 Green 函数的边界值都为 0.

### 4.　Riemann 映照定理

作为 Green 函数的应用，有

**定理 6**　（Riemann 映照定理）设 $D$ 是 Riemann 曲面的相对紧单连通子区域. 若其相对边界 $\Gamma$ 是一 Jordan 曲线，则 $D$ 可被共形映上开单位圆盘.

**证**　根据定理 4，区域 $D$ 上存在 Green 函数，现记为 $g(z,a)$. 设 $h(z)$ 是 $g(z,a)$ 的共轭调和函数. 由于对任一 $D$ 内的环绕点 $a$ 的 Jordan 曲线 $C$ 有

$$\int_C \frac{\partial g(z,a)}{\partial v} ds = 2\pi. \tag{1}$$

其中 $v$ 是 $C$ 的指向点 $a$ 一侧的法方向. 那么函数

$$w = f(z) := e^{-[g(z,a)+ih(z)]}$$

在 $D$ 上是单值解析的.

显然 $f$ 将 $D$ 映入开单位圆盘 $\Delta := \{w \mid |w| < 1\}$. 根据 §3 定理 14, $\Gamma$ 上的每一点都存在垒. 于是, 对任意 $\zeta \in \Gamma$ 都有

$$\lim_{D \ni z \to \zeta} |f(z)| = 1.$$

从而 $f$ 是满映照. 又由于 $\Delta$ 是单连通的, 根据单值性定理, $f$ 的逆映照是单值的. 从而映照 $f$ 将 $D$ 共形映上开单位圆盘 $\Delta$. ▌

**注** 必须指出: 由于共轭调和函数在相差一常数的意义下是唯一的, 故取 Green 函数的共轭调和函数时可能相差一常数 $\alpha$, 例如取成 $h(z)+\alpha$, 那么映照函数为 $e^{-[g+i(h+\alpha)]}$, 即 $e^{-i\alpha}f(z)$, 与原映照相差一旋转关系.

我们将在第四章 §4 定理 12 推论 5 证明任一个(非退化的)连续统都具有正容量; 而在 §4 定理 8 证明, 边界是一正容集的区域必存在 Green 函数, 由此可得:

**定理 7** 设 $D$ 是某一 Riemann 曲面的相对紧单连通子区域. 若其相对边界 $\Gamma$ 是一(非退化的)连续统, 则 $D$ 可被共形映上开单位圆盘.

## 5. 调和测度、理想边界的调和测度

设 $D$ 是延拓的复 $z$-平面上的区域, 其边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交的 Jordan 曲线组成. 又设 $\Gamma$ 被分成两部分 $E$、$E'$, 其中每部分都是由有限条弧和闭曲线组成. 若 $\omega(z,E;D)$ 是区域 $D$ 关于在 $E$ 上取值 1、而在 $\Gamma \setminus E$ 上取值 0 的边界条件所得的 Dirichlet 问题之解, 则称 $\omega(z,E;D)$ 为 $E$ 的(在点 $z$ 处)关于区域 $D$ 的调和测度. 常简记为 $\omega(z)$. 显然 $0 \leqslant \omega(z) \leqslant 1$, 且在 $E$ 上几乎处处等于 1、而在 $E'$ 上几乎处处等于 0.

现在设 $R$ 是一开 Riemann 曲面, $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一穷尽, 其中

每个 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 又设函数 $\omega_n$ 是 $R_n\backslash R_0$ 上的 Dirichlet 解，使得

$$\omega_n(z)=\begin{cases}0, & \text{当 } z\in\Gamma_0;\\ 1, & \text{当 } z\in\Gamma_n.\end{cases}$$

$\omega_n$ 即为 $\Gamma_n$ 关于 $R_n\backslash R_0$ 的调和测度. 据最大值原理，在 $R_n\backslash R_0$ 上 $\omega_{n+1}(z)<\omega_n(z)$. 于是据 Harnack 原理，有调和函数 $\omega(z)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(z)=\omega(z),$$

其收敛在 $R_n\backslash R_0$ 上是广义一致的. 函数 $\omega(z)$ 称为 $R$ 关于 $R\backslash R_0$ 的<u>理想边界的调和测度</u>. 有下面两种情形

(i) $\omega(z)\not\equiv 0$；　和　　(ii) $\omega(z)\equiv 0$.

若情形(i)发生，则在 $R_n\backslash R_0$ 内 $0<\omega(z)<1$，且在 $\Gamma_0$ 上 $\omega(z)=0$. 此时称曲面 $R$ 具有<u>正理想边界</u>. 若情形(ii)发生，则称曲面 $R$ 具有<u>零理想边界</u>.

**定理 8**　$\omega(z)\equiv 0$ 当且仅当 $R\in O_G$. 如果 $R\overline{\in} O_G$，则

$$\overline{\lim_{z\to\beta}}\,\omega(z)=1,$$

其中 $\beta$ 表示 $R$ 的理想边界.

**证**　不妨设 $z=0\in R_0$. 设 $g_n(z,0)$ 为 $R_n$ 的 Green 函数. 若置 $M_n=\max\limits_{z\in\Gamma_0}g_n(0)$，则据最大值原理

$$(1-\omega_n(z))M_n\geqslant g_n(z,0),\quad \forall\, z\in R_n\backslash R_0.$$

所以
$$(1-\min_{z\in\Gamma_1}\omega_n(z))M_n\geqslant\max_{z\in\Gamma_1}g_n(z,0),\quad (n\geqslant 2).\tag{1}$$

由于 $g_n(z,0)-g_1(z,0)$ 在 $R_1$ 是调和的，据最大值原理，

$$\max_{z\in\Gamma_0}(g_n(z,0)-g_1(z,0))\leqslant\max_{z\in\Gamma_1}(g_n(z,0)-g_1(z,0)).$$

故　$M_n-\text{const.}\leqslant\max\limits_{z\in\Gamma_1}g_n(z,0)$.　据 (1)，

$$M_n-\text{const.}\leqslant M_n(1-\min_{z\in\Gamma_1}\omega_n(z)).$$

于是得

$$0 \leqslant \min_{z \in \Gamma_1} \omega(z) \leqslant \min_{z \in \Gamma_1} \omega_n(z) \leqslant \text{const.}/M_n. \tag{2}$$

若 $R \in O_G$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(z,0) = \infty$，所以 $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = \infty$. 因此可得 $\min\limits_{z \in \Gamma_1} \omega(z) = 0$. 于是 $\omega(z) \equiv 0$.

下面设 $R \overline{\in} O_G$，而 $g(z,0)$ 是 $R$ 上的 Green 函数. 假设

$$\varliminf_{z \to \beta} g(z,0) > 0.$$

由于 $g(z,0)$ 在 $z=0$ 外调和，在 $z=0$ 为对数奇点，则易知有正数 $\alpha$ 使在 $R$ 上 $g(z,0) > \alpha$. 令

$$h(z) := g(z,0) - \alpha > 0. \tag{3}$$

对任意自然数 $n$，由于在 $R_n$ 内 $h(z) \quad g_n(z,0)$ 是调和的，而在 $\Gamma_n$ 上 $g_n(z,0) = 0$，根据 (3)和最大值原理，在 $R_n$ 内 $h(z) - g_n(z,0) > 0$，即 $h(z) \geqslant g_n(z,0)$. 由此可得 $g(z,0) - \alpha \geqslant g(z,0)$， $\forall\, z \in R$. 矛盾. 因此

$$\varliminf_{z \to \beta} g(z,0) = 0. \tag{4}$$

现设 $m = \min\limits_{z \in \Gamma_0} g(z,0)$，则据最大值原理有

$$0 \leqslant 1 - \omega_n(z) \leqslant g(z,0)/m, \quad \forall\, z \in R_n \backslash R_0.$$

所以 $0 \leqslant 1 - \omega(z) \leqslant g(z,0)/m$， $\forall\, z \in R \backslash R_0$. 由 (3) 即得 $\varlimsup\limits_{z \to \beta} \omega(z) = 1$. 因此若 $R$ 存在 Green 函数，则有

$$\omega(z) \not\equiv 0. \quad \blacksquare$$

从上面证明可得：

**定理 9** 设 $R \overline{\in} O_G$. 若记 $\beta$ 为 $R$ 的理想边界，而 $g(z,a)$ 为 $R$ 的 Green 函数，则

$$\varliminf_{z \to \beta} g(z,a) = 0.$$

### 6. Dirichlet 解的 Green 函数之积分表示

**定理 10** 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的相对紧的子域，其关于

$R$ 的相对边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交的解析 Jordan 曲线或解析 Jordan 弧组成：$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$，其中，若 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 是解析 Jordan 弧且相交于共同顶点 $\zeta_i$，则它们在 $\zeta_i$ 处的交角为 $\pi$. 记 $\nu$ 为点 $\zeta\in\Gamma$ 处的 $\Gamma$ 的内法向.

设 $g(z,z_0)$ 是区域 $D$ 的 Green 函数，其中 $z_0\in D$. 则 $\dfrac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial\nu}$ 是 $\Gamma$ 上的恒取正值的连续函数，且

$$\int_\Gamma \frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial\nu}\,|\mathrm{d}\zeta| = 2\pi.$$

设 $\zeta_0\in\Gamma$，若有 $\Gamma$ 的子弧 $\alpha$ 使得 $\zeta_0$ 为其内点，则

$$\lim_{z_0\to\zeta_0}\int_\alpha \frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial\nu}\,|\mathrm{d}\zeta| = 2\pi,\qquad \lim_{z_0\to\zeta_0}\int_{\Gamma\setminus\alpha} \frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial\nu}\,|\mathrm{d}\zeta| = 0.$$

**证**　设 $\zeta_0=0$，且 $\Gamma$ 与实轴相触交于原点 $z=0$. 对正数 $\rho$，分别将 $D$、$\Gamma$ 与 $O(0,\rho)$ 相交的部分记为 $D_\rho$、$\Gamma_\rho$. 选取 $\rho$ 足够小使得 $D_\rho$ 是单连通的且位于上半平面. 将 $D_\rho$ 共形映上 $w=x+\mathrm{i}y$-平面上的开半圆盘 $\{w\,|\,|w|<1,\ y>0\}$ 使得 $z=0$ 对应于 $w=0$、$\Gamma_\rho$ 被映成直径 $\{w\,|\,-1<x<1,\ y=0\}$. 设 $z=\varphi(w)$ 是映照函数.

先证明定理的第一部分.

设 $z_0\,\overline{\in}\,\overline{D_\rho}$. 若记 $G(w)=G(x,y)=g(\varphi(w),z_0)$，则 $G(w)$ 是半圆盘 $\{w\,|\,|w|<1,\ y>0\}$ 内的调和函数，且在实轴上 $G=0$. 所以 $G$ 可越过实轴调和延拓到整个开圆盘 $\{w\,|\,|w|<1\}$. 根据引理 1，

$$\left[\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right]_{y=0} = G_y(x,0) > 0,\quad \text{当 } -1<x<1. \tag{1}$$

如果 $\zeta\in\Gamma_\rho$ 对应于 $w=x$，则

$$\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial\nu}\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|_{w=x} = G_y(x,0) > 0. \tag{2}$$

根据共形映照理论，甚至当 $\zeta_0=0$ 是 $\Gamma$ 的顶点时，在带状域 $\{w\,|\,-1<x<1\}$ 上 $\left|\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|_{w=x}>0$ 且为连续的，所以在 $\Gamma_\rho$ 上，从而在

$\Gamma$ 上 $\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}>0$ 且为连续的.

设 $\Gamma_\delta$ 是 $g$ 的等位线 $\{z|g(z,z_0)=\delta\}(\delta>0)$，则

$$\int_{\Gamma_\delta}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|d\zeta|=2\pi.$$

由于 $\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}$ 在 $\Gamma$ 上为连续的，则若令 $\delta\to0$，即得

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|d\zeta|=2\pi. \tag{3}$$

下面证明定理的第二部分. 设 $z_0\in D_p$，$w_0=\varphi^{-1}(z_0)$. 若置

$$g(z,z_0)=G(w,w_0)=\log\left|\frac{w-\bar{w}_0}{w-w_0}\right|+H(w,w_0), \tag{4}$$

则 $H(w,w_0)$ 在 $\{w||w|<1\}$ 内调和. 又由于对任意 $r\in(0,1)$，在 $\{w||w|=r\}$ 上 $\lim\limits_{w_0\to0}G(w,w_0)=0$ 和 $\lim\limits_{w_0\to0}\log\left|\frac{w-\bar{w}_0}{w-w_0}\right|=0$ 都成立，且其收敛是一致的，故 $\lim\limits_{w_0\to0}H(w,w_0)=0$ 在 $\{w||w|=r\}$ 上，从而在 $\{w||w|\leqslant r\}$ 上收敛是一致的. 所以 $\lim\limits_{w_0\to0}H_y(x,0;w_0)=0$，且其收敛在闭圆盘 $\{w||x|\leqslant r_1<r\}$ 上是一致的，故得

$$\lim_{w_0\to0}\int_{-r_1}^{r_1}H_y(x,0;w_0)=0. \tag{5}$$

另一方面

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\log\left|\frac{w-\bar{w}_0}{w-w_0}\right|\right)_{y=0}=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\qquad(w_0=x_0+iy_0).$$

假设 $\alpha$ 对应于线段 $\{w|-r_1<|x|<r_1,y=0\}$，则

$$\int_\alpha\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|d\zeta|$$

$$=\int_{-r_1}^{r_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\log\left|\frac{w-\bar{w}_0}{w-w_0}\right|\right)_{y=0}dx+\int_{-r_1}^{r_1}H_y(x,0;w_0)\,dx.$$

因此根据(5)，有

$$\lim_{z_0\to 0}\int_{\alpha}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta| = \lim_{y_0\to 0}\int_{-r_1}^{r_1}\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi. \quad (6)$$

所以从

$$\int_{\alpha}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta| + \int_{I\setminus\alpha}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta| - \int_{l}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta| = 2\pi$$

可得

$$\lim_{z_0\to 0}\int_{I\setminus\alpha}\frac{\partial g(\zeta,z_0)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta| = 0. \quad ▌$$

**注**　如果 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 在 $\zeta_i$ 处的交角为 $\alpha_i\pi$ $(0<\alpha_i\leqslant 2)$，那么映照 $w=(z-\zeta_i)^{1/\alpha_i}$ 将 $\zeta_i$ 的邻域 $U_i$ 共形映上 $w=0$ 的邻域 $V_i$. 于是 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 的象在 $w=0$ 处的交角为 $\pi$. 由于 $\frac{\partial g}{\partial v}\mathrm{d}s$ 是共形不变的，只要将 $U_i$ 和 $V_i$ 视为恒同，所讨论的情形可归结为 $\alpha_i=1$ 的情形. 因此，对这样的区域定理仍成立.

**定理 11**　在定理 8 的条件下，设 $f(\zeta)$ 是 $\Gamma$ 上的有界可测函数. 若置

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} f(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial v}\,|\mathrm{d}\zeta|,$$

则 $u(z)$ 是 $D$ 内的有界调和函数. 若 $f(\zeta)$ 在 $\zeta_0\in\Gamma$ 处连续，则

$$\lim_{D\ni z\to\zeta_0} u(z) = f(\zeta_0).$$

定理 11 易从定理 10 得证. 定理中的函数 $u(z)$ 即是以 $f$ 为边值关于 $D$ 的 Dirichlet 问题的解.

## 7.　混合边界条件的 Dirichlet 问题之解

设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个相对紧的子区域，其关于 $R$ 的相对边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交解析 Jordan 曲线或解析 Jordan 弧组成：$\Gamma=\bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$. 如果某两条弧 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 在共同顶点 $\zeta_i$ 处相交，

则其相交的内角为 $\alpha_i\pi$ $(0<\alpha_i\leqslant 2)$. 下面是所谓的 Neumann 问题，定理中的函数 $u(z)$ 称为 Neumann 问题的解.

**定理** 12 设 $f(\zeta)$ 是定义在 $\Gamma\setminus\bigcup_i\{\zeta_i\}$ 上的连续函数，且满足条件：(a) $|f(\zeta)|\leqslant M$, $\forall\ \zeta\in\Gamma$; 和 (b) $\int_\Gamma f(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|=0$. 则在 $D$ 内存在调和函数 $u(z)$ 使得在 $\overline{D}$ 上 $u(z)$ 是连续的，且

(i) $|u(z)|\leqslant k_1M$, $\forall\ z\in\overline{D}$, 其中 $k_1:=k(D)$ 是仅与 $D$ 有关的常数；

(ii) $\lim\limits_{z\to\zeta}\dfrac{\partial u}{\partial v}=f(\zeta)$, $\forall\ \zeta\in\Gamma$, $\zeta\neq\zeta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$, 其中 $v$ 是 $\Gamma$ 关于 $D$ 的内法向，而 $z\to\zeta$ 是沿着点 $\zeta$ 处的 $v$ 方向变动的.

(iii) $u$ 在 $D$ 上的 Dirichlet 积分 $D[u]$ 可表为

$$D[u]=-\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial v}|\mathrm{d}\zeta|=-\int_\Gamma u(\zeta)f(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|,$$

所以

$$D[u]\leqslant k_2M^2,$$

其中 $k_2:=k_2(D)$ 是仅与 $D$ 有关的常数.

**证** 不妨设 $M=1$, 则

$$|f(\zeta)|\leqslant 1,\quad \forall\ \zeta\in\Gamma;\qquad \int_\Gamma f(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|=0. \tag{1}$$

首先，假设对每个 $\zeta_i$, $\alpha_i=1$. 设 $z=0\in D$, 而 $g(z,0)$ 是 $D$ 的以 $z=0$ 为极的 Green 函数. 根据定理 10, $\dfrac{\partial g(\zeta,0)}{\partial v}$ 在 $\Gamma$ 上是连续的且 $>0$, 其中 $v$ 是 $\Gamma$ 在 $\zeta$ 处的内法向. 因而，若置

$$\varphi(\zeta)=f(\zeta)\Big/\frac{\partial g(\zeta,0)}{\partial v}, \tag{2}$$

则 $\varphi(\zeta)$ 在 $\Gamma$ 上是有界的，且

$$\int_\Gamma\varphi(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,0)}{\partial v}|\mathrm{d}\zeta|=\int_\Gamma f(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|=0. \tag{3}$$

置

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\varphi(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial\nu}|d\zeta|,\quad z\in D,\tag{4}$$

则 $v(z)$ 在 $D$ 内是调和的且有 $v(0)=0$ 和

$$\lim_{D\ni z\to\zeta}v(z)=\varphi(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma.\tag{5}$$

设 $h=h(z,0)$ 是 $g=g(z,0)$ 的共轭调和函数，并置

$$u(z)=\int_0^z v(t)\,dg(t,0),\tag{6}$$

其中积分是从 0 出发沿 $h$ 的等位线 $dh=0$ 至 $z$ 止. 由于 $v(0)=0$，故积分是有限的. 首先必须证明 $u(z)$ 在 $D$ 内是单值的，即只要证明对使得对于 $D$ 内任一闭曲线 $C$，只要在 $C$ 上 $dh=0$

$$\int_C v(t)dg(t,0)=0.\tag{7}$$

为此，置

$$w(z)=\int_C g(t,z)dg(t,0).\tag{8}$$

下面将证明 $w(z)\equiv 0$.

先设 $C$ 不经过 $z=0$，所以 $w(z)$ 在 $C$ 上连续，从而在 $D$ 内也连续. 下面证明 $w(z)$ 在 $D$ 内是上调和的，为此只要证明它在 $C$ 上的每一点是上调和的. 设 $z_0\in C$ 不是曲线 $dh=0$ 的二重点，而其邻域为 $U(z_0)$. 置 $C_1=C\cap U(z_0)$，$C_2=C\setminus C_1$. 则

$$w(z)=\int_{C_1}g(t,z)dg(t,0)+\int_{C_2}g(t,z)dg(t,0).\tag{9}$$

记 $w_j(z)=\int_{C_j}g(t,z)dg(t,0)$，$j=1,2$. 通过映照

$$\zeta=x+iy=g(z,0)+ih(z,0)-(g(z_0,0)+ih(z_0,0))$$

可将 $U(z_0)$ 共形映上 $\zeta$-平面上点 $\zeta=0$ 的邻域 $V$，使得 $C_1$ 映成实轴线段 $\{\zeta|-\delta\leqslant x\leqslant\delta,\ y=0\}$. 对于 $z\in U(z_0)$，置 $w_1(z)=W_1(\zeta)$、$g(t,z)=G(x,\zeta)$，则

$$w_1(z)=W_1(\zeta)=\int_{-a}^{a}G(x,\zeta)\mathrm{d}x.$$

由于 $G(x,\zeta)=\log\dfrac{1}{|x-\zeta|}+$（调和函数），则 $W_1(\zeta)$ 在 $V$ 内是上调和的，故 $w_1(z)$ 在 $U(z_0)$ 内是上调和的. 又 $w_2(z)$ 在 $U(z_0)$ 内是调和的，则 $w(z)$ 在 $U(z_0)$ 内是上调和的. 下面证明点 $z_0\in C$ 是曲线 $\mathrm{d}h=0$ 的二重点，而 $U(z_0)$ 是其邻域，不包含其他二重点. 则 $w(z)$ 除 $z_0$ 外在 $U(z_0)$ 内是上调和的. 但 $w(z)$ 是连续的，故易知它在 $z_0$ 处是上调和的. 由此可见 $w(z)$ 在 $C$ 上，从而在 $D$ 内是上调和的. 由(8)可知在 $\Gamma$ 上 $w=0$，故根据最大值原理，在 $D$ 内 $w\geqslant 0$. 又由于 $w(0)=0$，故 $w\equiv 0$.

由于

$$w(z)=\int_C g(t,z)\mathrm{d}g(t,0)=\int_C g(z,t)\mathrm{d}g(t,0)\equiv 0,$$

则

$$\int_C\frac{\partial g(\zeta,t)}{\partial \nu}\mathrm{d}g(t,0)=0,\quad \zeta\in\Gamma.$$

所以

$$\int_C v(t)\mathrm{d}g(t,0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\varphi(\zeta)\mathrm{d}|\zeta|\int_C\frac{\partial g(\zeta,t)}{\partial \nu}\mathrm{d}g(t,0)=0.$$

因此已经证明了 $C$ 不通过 $z=0$ 的情形.

下面证明 $C$ 通过 $z=0$ 的情形. 将等位线 $\{z|g(z,0)=\lambda\}$ 记为 $\Gamma_\lambda$（$\lambda$ 为正数），则当 $\lambda$ 足够大时 $\Gamma_\lambda$ 是环绕 $z=0$ 的 Jordan 曲线. 于是 $C$ 必与 $\Gamma_\lambda$ 相交于两点，记为 $z_1$、$z_2$. 记 $C_\lambda$ 为 $C$ 置于 $\Gamma_\lambda$ 内部的部分并设

$$w_\lambda(z)=\int_{C\setminus C_\lambda}g(t,z)\mathrm{d}g(t,0),\quad z\in D. \tag{10}$$

则由于

$$w_\lambda(0) = \int_{C\setminus C_\lambda} g(t,0)\mathrm{d}g(t,0)$$

$$= \frac{1}{2}(g^2(z_2,0) - g^2(z_1,0)) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda^2) = 0,$$

类似于上面的证明可得 $w_\lambda(z)\equiv 0$ 且

$$\int_{C\setminus C_\lambda} v(t)\mathrm{d}g(t,0) = 0.$$

令 $\lambda\to\infty$ 即得

$$\int_C v(t)\mathrm{d}g(t,0) = 0.$$

至此，式(7)已得证. 所以 $u(z)$ 在 $D$ 内是单值的. 显然 $u(z)$ 在 $\overline{D}$ 内是连续的，故存在仅与 $D$ 有关的常数 $k_1$ 使得在 $\overline{D}$ 内 $u(z)\leqslant k_1$.

下面证明 $u(z)$ 在 $D$ 内是调和的. 设 $z\in D$，且不是曲线 $\mathrm{d}h=0$ 的二重点 $\{a_i\}$ 之一. 则由 $[\partial v/\partial g]_{z=0}=0$ 和式(6)可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial g^2} = \frac{\partial v}{\partial g}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = \int_0^z \frac{\partial^2 v}{\partial h^2}\mathrm{d}g = -\int_0^z \frac{\partial^2 v}{\partial g^2} = -\frac{\partial v}{\partial g}.$$

所以 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial g^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0$，故 $u(z)$ 在点 $z$ 处调和.

又由于 $u(z)$ 在 $a_i$ 的邻域内有界，故在点 $a_i$ 处调和，从而在 $D$ 内调和. 根据(2)、(5)，若令 $z\to\zeta\in\Gamma$ 沿着点 $\zeta$ 处的内法方向 $\nu$ 变动，则

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \nu} = v(z)\,\frac{\partial g(z,0)}{\partial \nu} \to \varphi(\zeta)\,\frac{\partial g(\zeta,0)}{\partial \nu} = f(\zeta). \qquad (11)$$

由此易证

$$D[u] = -\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial \nu}|\mathrm{d}\zeta| = -\int_\Gamma u(\zeta)f(\zeta)|\mathrm{d}\zeta|. \qquad (12)$$

所以存在仅与 $D$ 有关的常数 $k_2$ 使得 $D[u]\leqslant k_2$.

至此已证明了在每一点 $\zeta_i$ 处 $\alpha_i=1$ 的情形. 如果某两条弧 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 在共同顶点 $\zeta_i$ 处相交的内夹角为 $\alpha_i\pi$ $(\alpha_i\neq 1)$，则通过映照 $x=(z-\zeta_i)^{1/\alpha_i}$ 可将 $\zeta_i$ 的邻域 $U(\zeta_i)$ 共形映上 $x=0$ 的某个邻域 $V_i$，

使得 $\Gamma_i$ 和 $\Gamma_{i+1}$ 的象 $\gamma_i$ 和 $\gamma_{i+1}$ 在 $x=0$ 处的交角为 $\pi$. 今在 $\gamma_i \cup \gamma_{i+1}$ 上定义 $f^*(x)$ 如下：

$$f^*(x)|dx| = f(\zeta)|d\zeta|.$$

如果将 $V_i$ 与 $U(\zeta_i)$ 视为等同，而在每一 $\alpha_i \neq 1$ 的顶点 $\zeta_i$ 处用 $f^*(x)$ 代替 $f(\zeta)$，则一般的情形可归结为在点 $\zeta_i$ 处 $\alpha_i=1$ 的情形. 那么，尽管经修正过的 $f(\zeta)$ 一般在 $\Gamma$ 上未必有界，但却为可积的且 $\int_\Gamma f(\zeta)|d\zeta| = 0$. 故不必改动证明过程即可知定理的一般的情形得证. ▌

上述是定理 12 的直接证明，而一般 $u(z)$ 的存在性的证明是借助于积分方程的. 下面是混合边界问题.

**定理 13** 设 $D$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个相对紧的子区域，其关于 $R$ 的相对边界 $\Gamma$ 由有限条互不相交解析 Jordan 曲线组成：$\Gamma=(\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i)\cup(\bigcup_{j=1}^{n}C_j)$. 若在每个 $\Gamma_i$ 上给定连续函数 $f_i(\zeta)$、在每个 $C_j$ 上给定连续函数 $g_j(\zeta)$，则在 $D$ 内存在调和函数 $u(z)$ 使得对任一 $i$ 或 $j$ $(i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n)$

$$u(\zeta) = f_i(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in \Gamma_i, \qquad \frac{\partial u(\zeta)}{\partial v} = g_j(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in C_j,$$

其中 $v$ 是 $C_j$ 关于 $D$ 在点 $\zeta$ 处的内法向.

**证** 先考虑两种特殊情况：(1) 在 $\Gamma_i$ 上 $u=f_i$ $(i=1,\cdots,m)$，在 $C_j$ 上 $\frac{\partial u}{\partial v}=0$ $(j=1,\cdots,n)$；(2) 在 $\Gamma_i$ 上 $u=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，在 $C_j$ 上 $\frac{\partial u}{\partial v}=g_j$ $(j=1,\cdots,n)$.

(1) 设 $\hat{D}$ 是区域 $D$ 关于 $\bigcup_{j=1}^{n}C_j$ 的 Schottky 双倍，而 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{\Gamma}_i$ 分别为 $D$ 和 $\Gamma_i$ 关于 $\bigcup_{j=1}^{n}C_j$ 的对称象. 现在设 $u(z)$ 是在 $\tilde{\Gamma}_i$ 和 $\Gamma_i$ $(i=1,\cdots,m)$ 上取边界值 $f_i$ 的 $\hat{D}$ 的 Dirichlet 问题之解. 对于关于 $\bigcup_{j=1}^{n}C_j$

的两对称点 $z$ 和 $\tilde{z}$，显然有 $u(z)=u(\tilde{z})$. 故在 $C_j$ 上 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ ($j=1,2,\cdots,n$). 因此 $u(z)$ 是情形(1)的解.

(2) 设 $\hat{D}$ 是区域 $D$ 关于 $\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i$ 的 Schottky 双倍，而 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{C}_j$ 分别为 $D$ 和 $C_j$ 关于 $\bigcup_{i=1}^{m}\Gamma_i$ 的对称象. 现在设 $u(z)$ 是在 $C_j$ 上取边界值 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=g_j$、在 $\tilde{C}_j$ 上取边界值 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=-g_j$ ($j=1,2,\cdots,n$) 的 $\hat{D}$ 的 Neumann 问题之解. 显然上述条件满足 Neumann 问题的可解性条件，所以这样的解 $u(z)$ 是存在的. 记 $v(z)=u(z)+u(\tilde{z})$，其中 $z$ 和 $\tilde{z}$ 是 $\hat{D}$ 中的关于 $\bigcup_{j=1}^{n}C_j$ 的两对称点，则 $v(z)$ 是边界值 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ 的 $\hat{D}$ 的 Neumann 问题之解. 故 $v\equiv\text{const.}$. 如果将 $u(z)$ 规范化使得在某点 $\zeta_0\in\Gamma_1$ 处 $u(\zeta_0)=0$，则 $v(\zeta_0)=0$，于是 $v\equiv 0$. 又在 $\Gamma_i$ 上 $z=\tilde{z}$，则又在 $\Gamma_i$ 上 $u=0$，在 $C_j$ 上取边界值 $\frac{\partial u}{\partial \nu}=g_j$. 因此 $u(z)$ 是情形(2)的解.

下面考虑一般情形. 设 $u_1(z)$ 是情形(1)的解，而 $u_2(z)$ 是情形(2)的解，则 $u(z):=u_1(z)+u_2(z)$ 是一般情形的解. ▌

# 第四章

# 位势理论

## §1 下调和函数的逼近定理

### 1. 下调和函数

第三章§3已引进上、下调和函数的概念. 本段将对下调和函数进行深入讨论. 当然，上调和函数都有着与之相对应的结论.

设 $u(z)$ 是定义在复平面区域 $D$ 内的下调和函数. 若闭圆盘 $\overline{O(z_0,r)}$ 包含于 $D$ 中，且 $u(z_0)>-\infty$，则根据第三章§3.3，$u(z)$ 在闭圆盘 $\overline{O(z_0,r)}$ 及其边界圆周上分别都可积. 置

$$L(u;z_0,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta})d\theta,$$

$$A(u;z_0,r)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z-z_0|\leqslant r}u(z)\rho\,d\rho d\theta.$$

**定理 1** 设 $u(z)$ 是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 则 $u(z)$ 在包含于 $D$ 中的圆周 $C:=\{z\,|\,|z-z_0|=r\}$ 上是可积的，甚至当闭圆盘 $\overline{O(z_0,r)}$ 包含有不属于 $D$ 的点时仍成立.

**证** 选取 $0<r_1<r<r_2$ 使得闭圆环 $R:=\{z\,|\,r_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2\}$ 包含于 $D$ 中. 采用与调和上属 $\overline{H}$ 的概念(第三章§3.2)相应的记号. 设 $\{\varphi_n(z)\}$ 是单调下降趋于 $u(z)$ 的连续函数列，而 $H_n(z)$ 是圆

环 $R$ 的以 $\varphi_n$ 为边值的 Dirichlet 问题之解，则

$$\lim_{n\to\infty} H_n(z) = \overline{H}(z) \not\equiv -\infty.$$

由于 $H_n(z)$是圆环 $R$ 内的调和函数，根据 Green 公式，

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial H_n(z_0+\rho e^{i\theta})}{\partial \rho} \rho d\theta = \text{const.} \quad (r_1 < \rho < r_2),$$

故

$$L(H_n; z_0, \rho) = a_n \log \rho + b_n \quad (r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2). \tag{1}$$

类似可得

$$L(\overline{H}; z_0, \rho) = a \log \rho + b \ (r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2) \tag{2}$$

又由于 $H_n(z)$是单调减小趋于 $\overline{H}(z)$的，根据 Lebesgue 定理，$L(H_n; z_0, \rho) \to L(\overline{H}; z_0, \rho)$. 所以 $a_n \to a$、$b_n \to b$, 因此

$$L(u; z_0, r) = \lim_{n\to\infty} L(H_n; z_0, r) = L(\overline{H}; z_0, r) = a \log r + b,$$

故 $u(z)$在圆周 $C$ 上是可积的. ▌

**定理 2** 设 $u(z)$是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 若闭圆环 $\{z \mid 0 < r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2\}$包含于 $D$ 中，则 $L(u; z_0, r)$关于变量 $\log r$ $(r_1 \leqslant r \leqslant r_2)$是连续凸函数.

**证** 与定理 1 相同，采用与调和上属概念相应的记号. 则

$$\lim_{n\to\infty} L(H_n; z_0, r) = a \log r + b \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} L(u; z_0, r_1) &= \lim_{n\to\infty} L(H_n; z_0, r_1) = a \log r_1 + b, \\ L(u; z_0, r_2) &= \lim_{n\to\infty} L(H_n; z_0, r_2) = a \log r_2 + b. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由于 $u \leqslant H_n$, 故 $L(u; z_0, r) \leqslant L(H_n; z_0, r)$, 从而

$$L(u; z_0, r) \leqslant \lim_{n\to\infty} L(H_n; z_0, r) = a \log r + b \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2). \tag{3}$$

由(2)、(3)可得 $L(u; z_0, r)$是关于 $\log r$ $(r_1 \leqslant r \leqslant r_2)$的凸函数. 又由于 $L(u; z, r)$ 是上有界的，故为连续函数. ▌

**定理 3** 设 $u(z)$是定义在复平面区域 $D$ 内的下调和函数. 如果闭圆盘$\{z \mid |z - z_0| \leqslant r_0\}$包含于 $D$ 中，那么函数 $L(u; z_0, r)$关于变

量 $r$ $(0\leqslant r\leqslant r_0)$是单调增加函数，且

$$\lim_{r\to 0} L(u;z_0,r) = u(z_0).$$

**证**　设 $r_1<r_2\leqslant r_0$. 采用与调和上属的概念相应的记号. 则

$$L(H_n;z_0,r_2) = H_n(z_0) = L(H_n;z_0,r_1) \geqslant L(u;z_0,r_1).$$

令 $n\to\infty$可得

$$L(u;z_0,r_2) \geqslant L(u;z_0,r_1)\ (r_2 > r_1). \tag{1}$$

因此 $L(u;z_0,r)$关于 $r$ $(0\leqslant r\leqslant r_0)$是单调增加的.

又由于 $u(z_0)\leqslant L(u;z_0,r)$，故 $u(z_0)\leqslant \lim\limits_{r\to 0} L(u;z_0,r)$. 从上半连续性可得 $\lim\limits_{r\to 0} L(u;z_0,r)\leqslant u(z_0)$. 所以

$$\lim_{r\to 0} L(u;z_0,r) = u(z_0). \quad \blacksquare$$

**定理 4**　设 $u(z)$是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 如果闭圆盘$\{z\,|\,|z-z_0|\leqslant r_0\}$包含于 $D$ 中，那么函数 $A(u;z_0,r)$关于变量 $\log r$ $(0<r\leqslant r_0)$是单调增加的凸函数，且

$$u(z_0) \leqslant A(u;z_0,r) \leqslant L(u;z_0,r),$$

$$\lim_{r\to 0} A(u;z_0,r) = u(z_0).$$

**证**　设 $0<r\leqslant r_0$，则

$$A(u;z_0,r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r L(u;z_0,\rho)\rho\mathrm{d}\rho. \tag{1}$$

由于 $\dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_{\frac{(k-1)r}{n}}^{\frac{kr}{n}} \rho\mathrm{d}\rho = \dfrac{2k}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}$，又 $L(u;z_0,r)$关于变量 $r$ 连续，故

$$A(u;z_0,r) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} L\left(u;z_0,\frac{kr}{n}\right)\frac{2k}{n^2}. \tag{2}$$

因为 $L\left(u;z_0,\dfrac{kr}{n}\right)\dfrac{2k}{n^2}$ 关于 $\log r$ 是增凸函数，所以 $A(u;z_0,r)$ 关于 $\log r$ 也是增凸函数.

又由于 $L(u;z_0,r)$关于 $r$ 是增函数，故由(1)可得

$$u(z_0) \leqslant A(u;z_0,r) \leqslant L(u;z_0,r).$$

于是根据定理 3，

$$\lim_{r\to 0} A(u;z_0,r) = u(z_0). \quad ▌ \tag{3}$$

**注**　由式(3)和上半连续性即可得

$$u(z_0) = \overline{\lim_{z\to z_0}}\, u(z). \tag{4}$$

由定理 4 可得

**定理 5**　设 $R$ 是覆盖在复 $z$-球面上的 Riemann 曲面. 定义于 $R$ 的子区域 $D$ 内的广义实值函数 $u(z)$ 是下调和函数当且仅当函数 $u(z)$ 满足下面条件(i)～(iii)：

(i) $-\infty \leqslant u(z) < +\infty$ 且 $u(z) \not\equiv -\infty$；

(ii) $u(z)$ 是上半连续的；

(iii) 对任意 $z_0 \in D$，存在正数 $r_0$ 使圆盘 $O(z_0,r_0) \subset D$，且

$$u(z_0) \leqslant A(u;z_0,r), \quad \forall\, r \in [0,r_0).$$

## 2. 与 Laplace 算子相关的等价定义

**定理 6**　若定义在区域 $D$ 内的实值函数 $u(z)$ 具有二阶连续偏导数且在 $D$ 内

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0 \quad (\text{对应地}, < 0),$$

则 $u(z)$ 是 $D$ 内的下调和(对应地，上调和)函数.

**证**　只证对应于下调和的情形. 设 $D_1 \subset D$ 是一个 Jordan 区域，其边界为 $\Gamma$，而 $H$ 是 $D_1$ 内的调和函数使得在 $\Gamma$ 上 $H \geqslant u$. 若记 $v(z) = u(z) - H(z)$，则在 $\Gamma$ 上 $v(z) \leqslant 0$，但在 $D_1$ 内 $\Delta v = \Delta u > 0$.

假设 $v(z)$ 在某内点取正值，则必在某内点 $z_0 \in D_1$ 取到最大值，那么 $\Delta v(z_0) \leqslant 0$. 矛盾. 故在 $D_1$ 内 $v(z) \leqslant 0$，即 $u(z) \leqslant H(z)$. 根据第三章 § 3 定理 5，$u(z)$ 是 $D$ 内的下调和函数. ▌

**定理 7** 定义在区域 $D$ 内的具有二阶连续偏导数的实值函数 $u(z)$ 是下调和(对应地,上调和)函数当且仅当在 $D$ 内 $\Delta u \geqslant 0$ (对应地, $\Delta u \leqslant 0$).

**证** 只证对应于下调和的情形. 设 $u(z)$ 是 $D$ 内的下调和函数. 假设存在某点 $z_0 \in D$ 使得 $\Delta u(z_0) < 0$, 则在 $z_0$ 的某邻域 $U \subset D$ 内 $\Delta u(z) < 0$. 根据定理 6, $u(z)$ 是 $U$ 内的上调和函数, 从而是 $U$ 内的调和函数. 故 $\Delta u(z) = 0$, 矛盾. 于是在 $D$ 内 $\Delta u \geqslant 0$.

反之,设在 $D$ 内 $\Delta u \geqslant 0$. 记 $z = x + iy$. 置 $u^* = u + \varepsilon(x^2 + y^2)$, 其中 $\varepsilon > 0$. 显然在 $D$ 内 $\Delta u^* > 0$, 于是 $u^*$ 在 $D$ 内是下调和的. 从而 $u = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^*$ 是下调和的. ▌

### 3. 逼近定理

**定理 8** 设 $u(z)$ 是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 如果 $D_1$ 是 $D$ 的子区域且使得 $\overline{D}_1 \subset D$, 那么存在一实数 $\rho > 0$, 使得对于任意 $z_0 \in D_1$, $\overline{O(z_0, 2\rho)} \subset D$. 对 $z \in D_1$, 置

$$A_\rho(u; z) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{|\zeta - z| \leqslant \rho} u(\zeta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta, \quad \zeta = z + re^{i\theta},$$

则 $A_\rho(u; z)$ 是 $D_1$ 内的关于变量 $z$ 的连续下调和函数.

**证** 由于 $u(z)$ 在 $D_1$ 的任意有界可测子集 $E$ 上皆可积, 故当 $\mathrm{m}(E)$ 趋于 0 时 $u$ 的积分也趋于 0. 所以 $\lim\limits_{z \to z_0} A_\rho(u; z) = A_\rho(u; z_0)$, $\forall\, z_0 \in D_1$. 从而 $A_\rho(u; z)$ 是 $D_1$ 内关于变量 $z$ 的连续函数.

下面证明 $A_\rho(u; z)$ 是 $D_1$ 内的下调和函数. 设 $z_0 \in D_1$, 不妨设 $z_0 = 0$. 置 $u(z) = u(x, y)$, $z = x + iy$. 若 $|z| < \rho$, 则

$$u(x, y) \leqslant \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leqslant \rho^2} u(x + \xi, y + \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta,$$

通过在 $\{z \mid |z| \leqslant \rho\}$ 上取积分平均值可得

$$A_\rho(u; 0) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leqslant \rho^2} u(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} dxdy \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant\rho^2} u(x+\xi,y+\eta)d\xi d\eta.$$

由于在 $\overline{D}_1$ 上 $u\leqslant$const.，故可交换积分次序而得

$$A_\rho(u;0)\leqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant\rho^2} d\xi d\eta \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} u(x+\xi,y+\eta)dxdy.$$

又由于 $A_\rho(u;\xi,\eta)=\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}u(x+\xi,y+\eta)dxdy$，故

$$A_\rho(u;0)\leqslant\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant\rho^2}A_\rho(u;\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

因此根据定理 5，$A_\rho(u;z)$是 $D_1$ 内的下调和函数. ▌

设对任意 $z_0\in D_1$ 都有$\overline{O(z_0,n\rho)}\subset D$. 置

$$\left.\begin{aligned}&A_\rho^{(1)}(u;z)=A_\rho(u;z),\ A_\rho^{(2)}(u;z)=A_\rho(A_\rho^{(1)}(u;z);z),\cdots,\\&A_\rho^{(n)}(u;z)=A_\rho(A_\rho^{(n-1)}(u;z);z),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

则 $A_\rho^{(n)}(u;z)$是 $D_1$ 内的连续下调和函数，且

$$u(z)\leqslant A_\rho^{(1)}(u;z)\leqslant A_\rho^{(2)}(u;z)\leqslant\cdots\leqslant A_\rho^{(n)}(u;z).\qquad(2)$$

根据定理 4，$u(z)\leqslant A_\rho(u;z)\leqslant A_{\rho_1}(u;z)$ $(\rho<\rho_1)$. 故有

**定理 9**　$u(z)\leqslant A_\rho^{(n)}(u;z)\leqslant A_{\rho_1}^{(n)}(u;z)$ $(\rho<\rho_1)$，

$$\lim_{\rho\to0}A_\rho^{(n)}(u;z)=u(z).$$

**定理 10**　（逼近定理）设 $u(z)$是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 又设 $D_1$ 是 $D$ 的子区域使得对任意 $z_0\in D_1$，$\overline{O(z_0,3\rho_0)}\subset D$，其中 $\rho_0>0$. 置 $u_\rho^{(3)}(z)=A_\rho^{(3)}(u;z)$，$\forall\ z\in D_1$，则 $u_\rho^{(3)}(z)$是 $D_1$ 内的具有二阶连续偏导数的下调和函数，且

$$u(z)\leqslant u_\rho^{(3)}(z),\qquad\lim_{\rho\to0}u_\rho^{(3)}(z)=u(z),$$

其收敛是单调下降的.

**证**　设 $f(z)$是 $D$ 内的连续函数，置

$$A_\rho(f;z)=\frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}f(z+re^{i\theta})rdrd\theta,\quad z=x+iy,\qquad(1)$$

则
$$\frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial x}=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})\cos\theta\,d\theta,$$
$$\frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial y}=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})\sin\theta\,d\theta.$$
因此 $A_\rho(f;z)$具有一阶连续偏导数.

如果 $f(z)$具有一阶连续偏导数 $f_x$、$f_y$，那么根据(1)，
$$\frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial x}=A_\rho(f_x;z),\qquad \frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial y}=A_\rho(f_y;z).\tag{2}$$
从而 $\frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial x}$、$\frac{\partial A_\rho(f;z)}{\partial y}$ 皆具有一阶连续偏导数，故 $A_\rho(f;z)$ 具有二阶连续偏导数.

如果将上述结论用于 $f(z):=A_\rho^{(1)}(f;z)$，那么由于 $A_\rho^{(1)}(f;z)$ 是连续函数，故 $A_\rho^{(2)}(f;z)$ 必具有一阶连续偏导数. 于是函数
$$u_\rho^{(3)}(z)=A_\rho^{(3)}(u;z)$$
具有二阶连续偏导数. ▌

**定理 11**　设 $u(z)$是定义在区域 $D$ 内的下调和函数. 若 $D_1$ 是 $D$ 的子区域使得对任意 $z_0\in D_1$，$\overline{O(z_0,3\rho_0)}\subset D$，其中 $\rho_0>0$. 则存在正数 $M$ 使得对 $D_1$ 内的任一紧致集 $E$，对任意 $\rho\in(0,\rho_0]$
$$0\leqslant I(\rho):=\iint_E\Delta u_\rho^{(3)}dxdy\leqslant M.$$

**证**　根据 Borel 有限覆盖定理，不妨设 $E$ 是闭圆盘$\overline{O(z_0,r_0)}$. 由于 $u_\rho^{(3)}$ 是下调和的，故 $\Delta u_\rho^{(3)}\geqslant0$，从而 $I(\rho)\geqslant0$.

要证 $I(\rho)\leqslant M$，只要证 $\overline{\lim_{\rho\to0}}\,I(\rho)<\infty$. 由于 $L(u_\rho^{(3)};z_0,r)$关于 $\log r$ 是凸的，故根据 Green 公式
$$I(\rho):=\iint_{|z-z_0|\leqslant r_0}\Delta u_\rho^{(3)}dxdy=\int_0^{2\pi}\frac{\partial u_\rho^{(3)}}{\partial r_0}r_0d\theta=r_0\frac{\partial}{\partial r_0}\int_0^{2\pi}u_\rho^{(3)}d\theta$$
$$=2\pi\frac{dL(u_\rho^{(3)};z_0,r_0)}{d\log r_0}\leqslant2\pi\frac{L(u_\rho^{(3)};z_0,2r_0)-L(u_\rho^{(3)};z_0,r_0)}{\log 2r_0-\log r_0}.$$
从而　$\overline{\lim_{\rho\to0}}I(\rho)\leqslant2\pi\frac{L(u;z_0,2r_0)-L(u;z_0,r_0)}{\log 2}<\infty.$ ▌

## §2　对数位势

### 1.　对数位势

设 $E$ 是复平面 $S:=\{z\,|\,|z|<\infty\}$ 上的有界闭集，而 $\mu\geqslant 0$ 是 $E$ 上总质量有限的正质量分布. 下面考虑称为对数位势的函数

$$u(z):=\int_E \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a).$$

记号 $u(z)$ 在本节中皆表示对数位势. 本节还常用到下述函数：

$$|z-a|_\rho:=\begin{cases}|z-a|, & 当\ |z-a|\geqslant\rho;\\ \rho, & 当\ |z-a|\leqslant\rho.\end{cases}\qquad (*)$$

其中 $\rho>0$ 是固定的常数. 显然 $\log\dfrac{1}{|z-a|_\rho}$ 是关于双变元 $z$ 和 $a$ 的连续函数. 容易验证 $\log\dfrac{1}{|z-a|_\rho}$ 是关于 $z$ 的上调和函数.

**定理 1**　$u(z)$ 在平面 $S$ 内是下半连续且为上调和的.

**证**　容易验证 $u(z)$ 在 $E$ 外是调和的，故 $u\not\equiv\infty$. 由于 $E$ 是有界的，故有正数 $R>0$ 使得 $E\subset\overline{O(0,R)}$. 所以对任意 $a\in E$,

$$\int_E \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)\geqslant\mu(E)\log\frac{1}{|z|+R}>-\infty.$$

因此 $-\infty<u\leqslant\infty$. 对于数 $\rho>0$，置

$$u_\rho(z)=\int_E \log\frac{1}{|z-a|_\rho}\,\mathrm{d}\mu(a),\qquad (1)$$

则 $u_\rho(z)$ 是 $z$ 的连续函数. 又由于 $|z-a|_{\rho_1}\leqslant|z-a|_\rho\ (\rho_1<\rho)$，故

$$u_\rho(z)\leqslant u_{\rho_1}(z),\qquad 若\ 0<\rho_1<\rho.\qquad (2)$$

现将 $E$ 分成有限个直径小于 $\delta(>0)$ 的不交子集 $E_i\ (i=1,\cdots,n)$.

对于每个 $i$，取 $a_i\in E_i$，则

$$u_\rho(z)=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-a_i|_\rho}\mu(E_i). \tag{3}$$

由于 $\log\frac{1}{|z-a_i|_\rho}\mu(E_i)$ 是上调和的，故 $\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-a_i|_\rho}\mu(E_i)$ 是上调和的，从而 $u_\rho(z)$ 也是上调和的．根据(2)，$u_\rho(z)$关于 $\rho$ 是单调的，故 $u_\rho(z)\to u(z)$ ($\rho\to 0$)．所以 $u(z)$ 是下半连续的，且根据第三章 § 3 定理 2，$u(z)$ 是上调和的．▌

## 2. 几个引理

**引理 1** 设 $f(x),f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$是定义在$[a,b]$上变量 $x$ 的一凸函数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$．又设点 $x_0\in(a,b)$使得 $f'(x_0)$、$f_n'(x_0)(n=1,2,\cdots)$都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x_0)=f'(x_0)$．

**证** 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x_0)=\alpha$ 存在，否则可选取子列而实现之．

若 $\alpha>f'(x_0)$，则取一数 $\alpha_1$ 使得 $\alpha>\alpha_1>f'(x_0)$．于是存在自然数 $n_0$ 使得当 $n>n_0$ 时 $f_n'(x_0)>\alpha_1>f'(x_0)$．又由于 $f_n(x)$是凸函数，故 $f_n(x)-f_n(x_0)\geqslant\alpha_1(x-x_0)$ ($\forall\, x\in(x_0,b)$)．从而 $f(x)-f(x_0)\geqslant\alpha_1(x-x_0)$ ($\forall\, x\in(x_0,b)$)．由此可得矛盾式 $f'(x_0)\geqslant\alpha_1$．

反之，若 $\alpha<f'(x_0)$，同理可得矛盾．故 $f'(x_0)=\alpha_1$．▌

**引理 2** 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上关于变量 $x$ 的一凸函数．又设$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$是$(a,b)$中的点列使得 $x_n\to x_0\,(n\to\infty)$．若 $f'(x_0)$、$f'(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(x_n)=f'(x_0)$．

**证** 设 $f_n(x)=f(x+x_n-x_0)$．应用引理 1 即可得证．▌

设 $u(z)$是定义在 $z$-平面区域 $D$ 内的下调和函数．对点 $z\in D$，取数 $\rho>0$ 足够小使得 $\Delta_\rho(z):=O(z,\rho)\subset D$．置

$$L(u;z,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\ 0<r\leqslant\rho.$$

若 $\dfrac{r\,\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}$ 存在，则称 $\Delta_r(z)$为正则圆盘. 由于 $L(u;z,r)$关于 $\log r$ 是单调增加的凸函数，故除去最多可数个 $r$ 的值外 $\dfrac{r\,\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}\geqslant 0$ 存在.

**引理 3**　区域 $D$ 上存在质量分布 $\mu\geqslant 0$，使得

$$\mu(\Delta_r(z)) = r\frac{\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}\geqslant 0.$$

对任意正则圆盘 $\Delta_r(z)$都成立.

**证**　对于足够小的 $\rho>0$，采用 § 1.3 中的记号 $u_\rho^{(3)}$. 置

$$L(u_\rho^{(3)};z,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_\rho^{(3)}(z+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

则 $L(u_\rho^{(3)};z_0,r_0)$是关于变量 $\log r$ 的单调增加凸函数，而当 $\rho\to 0$ 时 $L(u_\rho^{(3)};z_0,r_0)$单调下降收敛于 $L(u;z,r)$. 于是根据引理 1，对任意正则圆盘 $\Delta_r(z)$

$$\lim_{\rho\to 0}\left(r\frac{\mathrm{d}L(u_\rho^{(3)};z,r)}{\mathrm{d}r}\right) = r\frac{\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}. \tag{2}$$

设 $\Omega$ 是使得 $\overline{\Omega}\subset D$ 的 $D$ 的子区域，其边界 $\Gamma$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 选取足够小的 $\rho_0>0$ 使对任意 $z\in\Omega$ 都有 $\Delta_{\rho_0}(z)\subset D$. 设 $0<\rho\leqslant\rho_0$，则 $\Delta u_\rho^{(3)}\geqslant 0$. 定义 $\Omega$ 的正测度 $\mu_\rho\geqslant 0$ 如下：

$$0\leqslant\mu_\rho(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\iint_\Omega u_\rho^{(3)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial u_\rho^{(3)}}{\partial v}\mathrm{d}s, \tag{3}$$

其中 $v$ 是 $\Gamma$ 的外法向. 根据 § 1 定理 12，

$$0\leqslant\mu_\rho(\Omega)\leqslant M := M(\Omega)\quad (0\leqslant\rho\leqslant\rho_0) \tag{4}$$

其中 $M(\Omega)$仅与区域 $\Omega$ 有关的常数.

显然 $\mu_\rho(\Omega)$是关于区域 $\Omega$ 的有限可加集函数. 根据 Carathéodory 的测度延拓定理，$\mu_\rho$ 可延拓成 $D$ 之 Borel 集上的测度. 根据式(4)，$\{\mu_\rho\}$有子列$\{\mu_{\rho_k}\}$浑收敛于 $D$ 的某个测度 $\mu$.

下面证明对任意正则圆盘 $\Delta_r(z)$，其边界 $\Gamma$ 不含正 $\mu$-质量.

根据式(2)，

$$\left.\begin{aligned}\mu_\rho(\Delta_r(z)) &= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\partial u_\rho^{(3)}}{\partial \nu}\mathrm{d}s \\ &= r\,\frac{\mathrm{d}L(u_\rho^{(3)};z,r)}{\mathrm{d}r} \to r\,\frac{\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}\ (\rho\to 0).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

根据引理 2，对任意 $\varepsilon>0$，取两正则值 $r_1<r_2\ (r_1<r<r_2)$ 使得

$$0\leqslant r_2\frac{\mathrm{d}L(u;z,r_2)}{\mathrm{d}r_2}-r_1\frac{\mathrm{d}L(u;z,r_1)}{\mathrm{d}r_1}<\varepsilon.$$

因此由式(5)，

$$0\leqslant \mu_\rho(\Delta_{r_2}(z))-\mu_\rho(\Delta_{r_1}(z))\leqslant\varepsilon,\qquad 若\ 0<\rho\leqslant\rho(\varepsilon).$$

所以 $0\leqslant\mu(\Delta_{r_2}(z))-\mu(\Delta_{r_1}(z))\leqslant\varepsilon$. 由于 $\Delta_r(z)$的边界 $\Gamma$ 不含正 $\mu$-质量，由 $\varepsilon$ 的任意性可得，对正则圆盘 $\Delta_r(z)$有

$$\mu_{\rho_k}(\Delta_r(z))\to\mu(\Delta_r(z))\quad(\rho_k\to 0),$$

因此由式(5)， $\mu(\Delta_r(z))=r\,\dfrac{\mathrm{d}L(u;z,r)}{\mathrm{d}r}\geqslant 0.$ ▌

### 3. F. Riesz 分解定理

**定理 2** (F. Riesz 分解定理) 设 $u(z)$是定义在区域 $D$ 内的下调和函数，存在定义在 $D$ 之 Borel 集上的质量分布 $\mu\geqslant 0$，使得对 $D$ 的任意子区域 $\Omega$, $\overline{\Omega}\subset D$,有

$$u(z)=v(z)-\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a),\quad \forall\, z\in\Omega,$$

其中 $v(z)$在 $\Omega$ 内调和.

**证** 设 $\mu$ 是引理 3 所定义的 $D$ 上的正质量分布. 在 $\Omega$ 内定义函数 $u(z)$和 $v(z)$如下：

$$\left.\begin{aligned}v(z)&=u(z)+\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a),\\ w(z)&=\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a),\quad\forall\, z\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

只需证明 $v(z)$ 是 $\Omega$ 内的调和函数. 为此取 $\rho_0>0$ 足够小，使得对任意 $z\in\Omega$，正则圆盘 $\Delta_{\rho_0}(z)$ 都包含于 $D$ 中. 置

$$L(w;z,r)=\int_0^{2\pi}w(z+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\quad 0<r\leqslant\rho_0. \tag{2}$$

设 $z=0\in\Omega$，则

$$L(w;0,r)=\int_0^{2\pi}w(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,\quad 0<r\leqslant\rho_0. \tag{3}$$

又设 $\Omega\subset O(0,R)$，置

$$\omega(r)=\int_{|a|<r}\mathrm{d}\mu(a),\quad 0<r<R. \tag{4}$$

由于 $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-a|\,\mathrm{d}\theta=\max(\log r,\log|a|)$，则

$$\begin{aligned}L(w;0,r)&=-\frac{1}{2\pi}\int_\Omega\mathrm{d}\mu(a)\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-a|\,\mathrm{d}\theta\\&=-\log r\,\omega(+0)-\int_{+0}^{R}\max(\log r,\log t)\,\mathrm{d}\omega(t)\\&=-\log r\,\omega(+0)-\log r\int_{+0}^{r}\mathrm{d}\omega(t)-\int_r^R\log t\,\mathrm{d}\omega(t)\\&=-\omega(R)\log R+\int_r^R\frac{\omega(t)\mathrm{d}t}{t},\end{aligned}$$

故
$$L(w;0,r)=-\mu(\Omega)\log R+\int_r^R\frac{\omega(t)\mathrm{d}t}{t}. \tag{5}$$

若 $\Delta_r(0)$ 是正则圆盘，则其边界 $\Gamma$ 不含正 $\mu$-质量. 故 $\omega(t)$ 在 $t=r$ 处连续. 根据式(5)，

$$\left.\begin{aligned}-r\frac{\mathrm{d}L(w;0,r)}{\mathrm{d}r}&=\omega(r)=\mu(\Delta_r(0))\\&=r\frac{\mathrm{d}L(u;0,r)}{\mathrm{d}r}\quad(0<r<\rho_0).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

因此，除去最多可数个 $r$ 的值外式(6)都成立.

作为 $\log r$ 的凸函数，$-L(w;0,r)$ 和 $L(u;0,r)$ 在 $(0,\rho_0)$ 内的任意闭线段上都是 $r$ 的绝对连续函数. 根据式(6)，它们的导数

几乎处处相等，故 $L(u;0,r)+L(w;0,r)\equiv\text{const.}$，于是

$$L(v;0,r)=L(u;0,r)+L(w;0,r)\equiv\text{const.}\quad(0<r\leqslant\rho_0).$$

类似地，对任意 $z\in\Omega$，对任意 $r\in(0,\rho_0]$，

$$L(v;z,r)=L(u;z,r)+L(w;z,r)\equiv\text{const.},\tag{7}$$

其中常数(const.)仅依赖于变量 $z$. 又由于

$$A_\rho(u;z)=\frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho L(u;z,r)\,r\mathrm{d}r,\quad A_\rho(w;z)=\frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho L(w;z,r)\,r\mathrm{d}r,$$

则 $A_\rho(v;z)=A_\rho(u;z)+A_\rho(w;z)\equiv\text{const.}\quad(\forall\ \rho\in(0,\rho_0])$.

因为 $u$ 和 $-w$ 都是下调和的，故

$$\lim_{\rho\to0}A_\rho(u;z)=u(z),\quad \lim_{\rho\to0}A_\rho(w;z)=w(z).$$

从而对任意 $\rho\in(0,\rho_0]$，

$$A_\rho(v;z)=\lim_{\rho\to0}A_\rho(v;z)=u(z)+w(z)=v(z).\tag{8}$$

又因为 $A_\rho(v;z)$ 和 $v(z)$ 都是 $z$ 的连续函数，且 $A_\rho(v;z)=v(z)$，所以 $v(z)$是调和函数.

下面证明这样的 $\mu$ 是唯一的. 假设存在两个 $\mu_1$、$\mu_2$ 使得

$$u(z)=v_1(z)-\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu_1(a)$$

$$-v_2(z)-\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu_2(a),\quad\forall\ z\in\Omega,$$

其中 $v_1(z)$、$v_2(z)$ 是满足式(1)的 $\mu_1$、$\mu_2$ 所对应的函数，它们在 $\Omega$ 内皆调和. 置 $v=v_1(z)-v_2(z)$、$\mu=\mu_1-\mu_2$，则

$$v(z)=-\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a)\tag{9}$$

是 $\Omega$ 内的调和函数. 不妨设 $z=0\in\Omega$，置

$$\omega(r)=\int_{|a|<r}\mathrm{d}\mu(a)-\int_{|a|<r}\mathrm{d}\mu_1(a)-\int_{|a|<r}\mathrm{d}\mu_2(a)=\omega_1(r)-\omega_2(r),$$

则根据式(9)、(5)，

$$v(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta=L(v;0,r)=\mu(\Omega)\log R-\int_r^R\frac{\omega(t)\mathrm{d}t}{t}.$$

由于 $\omega(r)$ 是两个增函数之差，因此除去最多可数个 $r$ 的值外 $\omega(r)$ 是连续的. 如果 $\omega(r)$ 在 $r$ 处连续，那么对上式两边微分就可得 $\omega(r)=0$，即 $\omega_1(r)=\omega_2(r)$. 因此 $\mu_1(\Delta_r(0))=\mu_2(\Delta_r(0))$.

又因为 $\omega_i(r+0)=\omega_i(r)\ (i=1,2)$，所以对任意 $r\in(0,\rho)$，必有 $\mu_1(\Delta_r(0))=\mu_2(\Delta_r(0))$. 从而 $\mu_1=\mu_2$. ▌

从上面定理 2 证明过程中可看出

**定理 3**　设 $\mu:=\mu_1-\mu_2$ 是定义在 $D$ 上的两个正质量分布 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 之差，其中 $\mu_1(D)$、$\mu_2(D)<\infty$. 置

$$u(z)=\int_D\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a).$$

又设 $\Delta$ 是一包含在 $D$ 内的圆盘. 如果 $u(z)$ 在 $\Delta$ 内是调和的、或者 $u(z)\equiv\text{const.}$ 在 $\Delta$ 内几乎处处成立，那么 $\mu(\Delta)=0$.

下面定理 4 是 F. Riesz 分解定理的应用.

**定理 4**　设 $u(z)$ 是定义在区域 $D$ 内的下调和函数，而 $C$ 是 $D$ 内的一条解析曲线，则 $u(z)$ 在 $C$ 上是可积的.

**证**　设 $C$ 包含在 $D$ 的紧致子区域 $\Omega$ 内. 置

$$v(z)=u(z)+\int_\Omega\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a),\quad \forall\, z\in\Omega,$$

则

$$\int_C|u(z)|\,|\mathrm{d}z|\leqslant\int_C|v(z)|\,|\mathrm{d}z|+\int_\Omega\mathrm{d}\mu(a)\int_C\left|\log\frac{1}{|z-a|}\right|\,|\mathrm{d}z|<\infty.\ ▌$$

上面各个定理都是局限在平面区域 $D$ 内，而类似地可将论证用于闭 Riemann 曲面的子区域，由此有：

**定理 5**　设 $G$ 是闭 Riemann 曲面的一个子区域. 如果 $u(z)$ 是定义在区域 $G$ 内的下调和函数，那么存在定义在 $G$ 上的质量分布 $\mu\geqslant0$，使得对 $G$ 的任意紧致子区域 $\Omega$，有

$$u(z)=v(z)-\int_{\Omega}g(z,a)\mathrm{d}\mu(a),\quad \forall z\in\Omega,$$

其中 $v(z)$ 在 $\Omega$ 内调和，而 $g(z,a)$ 是 $\Omega$ 的以 $a$ 为极的 Green 函数.

**定理 6**　在定理 5 的条件下，若 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成，则

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|-\int_{\Omega}g(z,a)\mathrm{d}\mu(a),\quad \forall z\in\Omega,$$

其中 $v_{\zeta}$ 是 $\Gamma$ 在 $\zeta$ 点处的外法向，而 $g(z,a)$ 是 $\Omega$ 的 Green 函数.

**证**　选取 $G$ 的一紧致子区域 $\Omega_0$ 使得 $\bar{\Omega}\subset\Omega_0$. 则在 $\Omega_0$ 内

$$u(z)=v_0(z)-\int_{\Omega_0}g_0(z,a)\mathrm{d}\mu(a),\quad \forall z\in\Omega_0,\tag{1}$$

其中 $v_0(z)$ 在 $\Omega_0$ 内调和，而 $g_0(z,a)$ 是 $\Omega_0$ 的以 $a$ 为极的 Green 函数. 于是若 $z\in\Omega$，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}v_0(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0}\mathrm{d}\mu(a)\int_{\Gamma}g_0(z,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|\\&=v_0(z)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0}\mathrm{d}\mu(a)\int_{\Gamma}g_0(z,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|\\&=u(z)+\int_{\Omega_0}g_0(z,a)\mathrm{d}\mu(a)\\&\quad-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0}\mathrm{d}\mu(a)\int_{\Gamma}g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

如果 $a\in\Omega_0\backslash\bar{\Omega}$，那么由于 $g_0(z,a)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内调和，故有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_{\zeta}}|\mathrm{d}\zeta|=g_0(z,a).\tag{3}$$

如果 $a\in\Gamma$，则在 $a$ 的足够小的邻域内选取 $a'\in\Omega_0\backslash\bar{\Omega}$，那么式(3)对 $a'$ 成立. 令 $a'\to a$ 即知式(3)对 $a\in\Gamma$ 仍然成立. 于是有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}|d\zeta| = g_0(z,a),\ a\in\Omega_0\backslash\Omega. \qquad (4)$$

如果 $a\in\Omega$，对点 $z\in\Omega$、$z\neq a$，设相互分离的两圆周

$$\gamma_{a}:=\{\zeta||\zeta-a|=r\} \quad 和 \quad \gamma_{z}:=\{\zeta||\zeta-z|=r\}$$

都包含在 $\Omega$ 内. 根据 Green 公式，

$$\int_{\Gamma}\left(g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}-g(\zeta,a)\frac{\partial g_0(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}\right)|d\zeta|$$
$$+\int_{\gamma_a}\left(g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}-g(\zeta,a)\frac{\partial g_0(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}\right)|d\zeta|$$
$$+\int_{\gamma_z}\left(g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}-g(\zeta,a)\frac{\partial g_0(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}\right)|d\zeta|=0,$$

其中在第一个积分里 $g(\zeta,a)=0$. 若令 $r\to0$，则容易得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}|d\zeta| = g_0(z,a)-g(z,a),\ a\in\Omega. \qquad (5)$$

因此，根据(4)、(5)，有

$$\int_{\Omega_0} g_0(z,a)d\mu(a)-\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega_0}d\mu(a)\int_{\Gamma} g_0(\zeta,a)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}|d\zeta|$$
$$=\int_{\Omega_0} g_0(z,a)d\mu(a)-\int_{\Omega_0\backslash\Omega} g_0(z,a)d\mu(a)$$
$$-\int_{\Omega}[g_0(z,a)-g(z,a)]d\mu(a)=\int_{\Omega} g(z,a)d\mu(a).$$

故根据(2)，对任意 $z\in\Omega$ 有

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta,a)}{\partial v_\zeta}|d\zeta|-\int_{\Omega} g(z,a)d\mu(a). \quad ▌$$

### 4. 最大值原理

**定理 7** （最大值原理）若在 $E$ 上 $u(z)\leqslant M$，则 $u(z)$ 在平面 $S$ 内也有 $u(z)\leqslant M$.

**证** 记 $D=S\backslash E$. 由于 $u(z)$ 除去在 $z=\infty$ 处取 $-\infty$ 外在 $D$ 内是调和的. 则只需证明对 $D$ 的任一边界上的点 $a_0$

$$\overline{\lim_{D\ni z\to a_0}}\ u(z)\leqslant M. \tag{1}$$

记 $U_\rho=O(a_0,\rho)$、$E_\rho=E\cap\overline{U}_\rho$. 由于在 $E$ 上 $u(z)\leqslant M$，则任何单点都不包含正质量. 于是对任意 $\varepsilon>0$，可以选取实数 $\rho>0$ 足够小，使得 $\mu(E_\rho)<\varepsilon$. 设 $z\in D_\rho:=D\cap U_\rho$. 现选取 $z_1\in E_\rho$，使得对于任意 $a\in E_\rho$ 有 $|z-z_1|\leqslant|z-a|$，则

$$|z_1-a|\leqslant|z-z_1|+|z-a|\leqslant 2|z-a|,\quad \forall\, a\in E_\rho.$$

从而

$$\int_{E_\rho}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)\leqslant\mu(E_\rho)\log 2+\int_{E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)$$

$$\leqslant\varepsilon\log 2+\int_{E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)$$

$$=\varepsilon\log 2+\int_{E}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)-\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)$$

$$\leqslant\varepsilon\log 2+u(z_1)-\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a),$$

即得

$$\left.\begin{aligned}&\int_{E_\rho}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)+\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)\\&\leqslant\varepsilon\log 2+u(z_1)\leqslant\varepsilon\log 2+M.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

显然 $\lim\limits_{z\to a_0}|z_1-z|=0$. 于是当 $z$ 足够靠近 $a_0$ 时

$$\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)\leqslant\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z_1-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)+\varepsilon.$$

因此根据 (2)，

$$u(z)=\int_{E_\rho}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)+\int_{E\setminus E_\rho}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)$$

$$<\varepsilon\log 2+M+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性可得 $\overline{\lim\limits_{z\to a_0}}\ u(z)\leqslant M$. ▌

**定理 8**　若 $u(z)$ 作为定义在 $E$ 上的函数在点 $a_0\in E$ 处连续，则 $u(z)$ 作为定义在 $a_0$ 的某个邻域上的函数在点 $a_0$ 处也连续.

**证**　根据定理 7 的式(2)，若 $|z-a_0|<\rho_0<\rho$，则有

$$u(z)<\varepsilon\log 2+u(z_1)+\varepsilon.$$

因为 $u(z)$ 作为定义在 $E$ 上的函数在点 $a_0\in E$ 连续，那么，若 $\rho_0$ 足够小则有 $u(z_1)<u(a_0)+\varepsilon$. 所以 $u(z)<\varepsilon\log 2+u(a_0)+2\varepsilon$. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性可得 $\varlimsup\limits_{z\to a_0}u(z)\leqslant u(a_0)$. 又由于 $u(z)$ 是下半连续的，故 $u(a_0)\leqslant\varliminf\limits_{z\to a_0}u(z)$. 所以 $\lim\limits_{z\to a_0}u(z)=u(a_0)$. ▌

5. **容量**

设 $E$ 是复 $z$-平面 $S:=\{z\,|\,|z|<\infty\}$ 上的有界闭集，$\mu\geqslant 0$ 是 $E$ 上总质量 $\mu(E)=1$ 的正质量分布. 考虑<u>能量积分</u>

$$I(\mu):=\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b).\tag{1}$$

置

$$V=\inf_\mu I(\mu),\ \mu(E)=1.\tag{2}$$

取 $M>1$ 足够大使得对于任意 $a$、$b\in E$ 有 $|a-b|\leqslant M$，则

$$I(\mu)=\iint_E\log\frac{M}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)-\log M\geqslant-\log M.$$

因此 $-\infty<V\leqslant\infty$.

若假设 $V<\infty$，则根据 (2)，存在一列 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $I(\mu_n)\to V$. 由于 $\mu_n(E)=1$，故可选取一子列，仍用原记号，使其浑收敛于一个正质量分布 $\mu$，其中 $\mu(E)=1$. 置

$$I(\mu)=\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b),\tag{3}$$

则 $V\leqslant I(\mu)$. 对 $\rho>0$，由于 $\log\dfrac{1}{|a-b|_\rho}$ 是二元连续函数. 故

$$\iint_E\log\frac{1}{|a-b|_\rho}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)=\lim_{n\to\infty}\iint_E\log\frac{1}{|a-b|_\rho}\,\mathrm{d}\mu_n(a)\mathrm{d}\mu_n(b)$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \iint_E \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\mu_n(a)\mathrm{d}\mu_n(b) - V.$$

因此若令 $\rho\to 0$，则得

$$I(\mu) = \iint_E \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b) \leqslant V,$$

由 $V\leqslant I(\mu)$ 可得

$$V = I(\mu) = \iint_E \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b),\ \mu(E) = 1.$$

**定义 1**　称 $\mu$ 为 $E$ 的<u>平衡分布</u>.

设 $z\in E$，若 $z$ 的任何邻域都包含正 $\mu$-质量，则称 $z$ 是 $\mu$-<u>正质量点</u>. 正质量点全体 $E^*$ 是 $E$ 的闭子集，称为 $\mu$ 的<u>支集</u>.

**定义 2**　设 $E$ 是复平面的有界闭集，$\mu$ 为 $E$ 的平衡分布，则

$$u(z) := \int_E \log \frac{1}{|z-a|} \mathrm{d}\mu(a), \quad \mu(E) = 1 \tag{6}$$

称为 $E$ 的<u>导体位势</u>. 如果置 $V = \int_E u(z)\mathrm{d}\mu(z)$，那么 $\mathrm{e}^{-V}$ 称为 $E$ 的<u>(对数)容量</u>，记为 $\gamma(E)$.

对平衡分布 $\mu$ 的支集 $E^*$，根据(6)，显然有

$$u(z) = \int_{E^*} \log \frac{1}{|z-a|} \mathrm{d}\mu(a), \quad \mu(E^*) = 1, \tag{7}$$

$$\int_E u(z)\mathrm{d}\mu(z) = \int_{E^*} u(z)\mathrm{d}\mu(z) = V = \log \frac{1}{\gamma(E)}. \tag{8}$$

于是若 $V<\infty$，则 $\gamma(E)>0$；若 $V=\infty$，则 $\gamma(E)=0$.

设 $E_1$、$E_2$ 是复平面 $S$ 的两个有界闭集，且 $E_1\subset E_2$. 根据定义，显然有 $V(E_1)\geqslant V(E_2)$，故 $\gamma(E_1)\leqslant\gamma(E_2)$.

**定义 3**　设 $E$ 是复平面 $S$ 的任一子集，则

$$\gamma(E) := \sup_{F\subset E} \gamma(F)$$

称为 $E$ 的<u>容量</u>，其中 $F$ 为 $E$ 的闭子集.

**注**　$\gamma(E)$ 称为内容量. 本书所涉及的的容量均为内容量. $E$ 的外容量定义为 $\gamma^*(E):=\sup\limits_{O\supset E}\gamma(O)$, 其中 $O$ 为包含 $E$ 的开集.

容易证明下面的定理 9、10.

**定理 9**　若 $E_1\subset E_2$, 则 $\gamma(E_1)\leqslant\gamma(E_2)$.

**定理 10**　设 $T: z'=az+b$ 是一线性变换, 且 $E_1=T(E)$, 则必有 $\gamma(E_1)=|a|\gamma(E)$.

**定理 11**　若有界闭集 $E$ 是一连续统, 则 $\gamma(E)>0$. 于是零容集不包含任何连续统.

**证**　设 $E$ 位于开上半平面. 置 $z=x+iy$. 又设 $E$ 在 $x$-轴上的投影是一线段 $L$. 对任一 $\alpha\in L$, 过 $\alpha$ 作一平行于 $y$-轴的直线, 记其与 $E$ 的交点中距 $x$-轴最近者为 $a$. 将 $a$ 与 $\alpha$ 相互连系起来, 在 $E$ 上定义 $\mathrm{d}\mu(a):=\mathrm{d}\alpha/|L|$, 则 $\int_E \mathrm{d}\mu(a)=1$, 其中 $|L|$ 表示 $L$ 的长度. 若 $\alpha$、$\beta$ 分别对应 $a$、$b\in E$, 则 $|\alpha-\beta|\leqslant|a-b|$, 故

$$\log\frac{1}{\gamma(E)}=V(E)\leqslant\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)$$

$$\leqslant\frac{1}{|L|^2}\iint_L\log\frac{1}{|\alpha-\beta|}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta<\infty.$$

由此可得 $\gamma(E)>0$. ▌

**定理 12**　设 $E$ 是复平面的一正容量有界闭集, 而 $\mu$ 是其上的平衡分布. 若将 $\mu$ 的支集记为 $E^*$, 则

$$\gamma(E^*)=\gamma(E).$$

**证**　设 $\gamma(E)=\mathrm{e}^{-V}$、$\gamma(E^*)=\mathrm{e}^{-V^*}$, 则由定义即得

$$V=I(\mu):=\iint_{E^*}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)\geqslant V^*.$$

故 $\gamma(E)\leqslant\gamma(E^*)$. 但 $E^*\subset E$, 故 $\gamma(E^*)\leqslant\gamma(E)$. 从而

$$\gamma(E)=\gamma(E^*).$$ ▌

**定理** 13　设 $E$ 是复平面的一正容量有界闭集. 又设 $\nu \geqslant 0$ 是 $E$ 上的一总质量为 1 且满足下式的正质量分布：

$$I(\nu) := \iint_E \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\nu(a)\mathrm{d}\nu(b) < \infty$$

那么对于 $E$ 的 Borel 子集 $e$，若 $\gamma(e)=0$，则 $\nu(e)=0$.

**证**　设 $E$ 包含于闭圆盘 $\overline{O(0,1/2)}$ 之中，则 $\log \frac{1}{|a-b|} \geqslant 0$，其中 $a \in E$，$b \in E$，从而

$$\iint_e \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\nu(a)\mathrm{d}\nu(b) \leqslant \iint_E \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\nu(a)\mathrm{d}\nu(b) < \infty.$$

假设 $\nu(e)>0$，则可取 $e$ 的一闭子集 $F$ 使得 $\nu(F)>0$. 因此

$$\iint_F \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\nu(a)\mathrm{d}\nu(b) \leqslant \iint_e \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\nu(a)\mathrm{d}\nu(b) < \infty.$$

故 $\gamma(F)>0$，即 $\gamma(e) \geqslant \gamma(F)>0$. 矛盾. 所以 $\nu(e)=0$. ▌

**定理** 14　设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一容量为零的 Borel 子集列，则其并集 $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 的容量也为零.

**注**　由于单点集是零容集，故有限集和可列集都是零容集.

**证**　假设 $\gamma(E)>0$，则存在一有界闭集 $F \subset E$ 使得 $\gamma(F)>0$. 若设 $\mu$ 是 $F$ 的平衡分布，则

$$\iint_F \log \frac{1}{|a-b|} \mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b) < \infty, \quad \mu(F) = 1.$$

由于 $1 = \mu(F) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap E_n)$，故有某个 $E_n$ 使 $\mu(F \cap E_n)>0$ 成立. 又根据定理 9，$\gamma(F \cap E_n) \leqslant \gamma(E_n)=0$，故 $\gamma(F \cap E_n)=0$. 但根据定理 13 有 $\mu(F \cap E_n)=0$，矛盾. 于是 $\gamma(E)=0$. ▌

**定理** 15　设 $E$ 是一有界闭集. 又设 $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一开集列，其中 $O_n$ 的边界由有限条相互不交的 Jordan 曲线组成，且满足：

(a) $E\subset O_{n+1}\subset O_n$, $n=1,2,\cdots$；　和　(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=E$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(\overline{O}_n)=\gamma(E)$.

**证**　记 $E_n=\overline{O}_n$. 不妨设 $E$ 包含于闭圆盘 $O(0,\overline{1/2})$ 之中.

由于 $E\subset E_{n+1}\subset E_n$, $\gamma(E)\leqslant\gamma(E_{n+1})\leqslant\gamma(E_n)$, 则

$$\gamma(E)\leqslant\lim_{n\to\infty}\gamma(E_n). \tag{1}$$

设 $\gamma(E)>0$, 并设 $\mu$ 和 $\mu_n$ 分别为 $E$ 和 $E_n$ 的平衡分布. 则

$$\log\frac{1}{\gamma(E_n)}=V_n=\iint_{E_n}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu_n(a)\mathrm{d}\mu_n(b).$$

其中 $\mu_n(E_n)=1$ $(n=1,2,\cdots)$. 根据选择定理, 可设存在一正质量分布 $v$, 使得 $\mu_n\to v$ 且 $v(E)=1$. 由于对 $a$、$b\in E$, $\log\frac{1}{|a-b|}>0$. 根据 Fatou 引理和 $V$ 的定义, 有

$$\log\frac{1}{\gamma(E)}=V\leqslant\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}v(a)\mathrm{d}v(b)$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu_n(a)\mathrm{d}\mu_n(b)=\log\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(E_n)}.$$

故

$$\gamma(E)\geqslant\lim_{n\to\infty}\gamma(E_n). \tag{2}$$

根据 (1)和 (2)得 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(E_n)=\gamma(E)$.

最后, 如果 $\gamma(E)=0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(E_n)=0$. ▌

**定理 16**　设 $E$ 是复平面 $S$ 上的一有界闭集, 则

$$\gamma(E)\geqslant\sqrt{\frac{\mathrm{m}(E)}{\pi\mathrm{e}}},$$

其中 $\mathrm{m}(E)$是 $E$ 的二维 Lebesgue 测度.

由此可见, 若 $\gamma(E)=0$, 则 $\mathrm{m}(E)=0$.

**证**　设 $\mathrm{m}(E)>0$. 记 $R=\sqrt{\frac{\mathrm{m}(E)}{\pi}}$. 用 $D$ 表示闭圆盘

$\overline{O(0,R)}$，则 $\mathrm{m}(D)=\mathrm{m}(E)$.

$$\iint_D \log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^R\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi R^2\left(\log\frac{1}{R}+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{m}(E)\,\log\sqrt{\frac{\pi\,\mathrm{e}}{\mathrm{m}(E)}}\,. \tag{1}$$

而另一方面

$$\left.\begin{aligned}&\iint_D\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint_{D\cap E}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\iint_{D\setminus E}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&\geqslant\iint_{D\cap E}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\log\frac{1}{R}\,[\mathrm{m}(D)-\mathrm{m}(D\cap E)].\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\iint_E\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint_{E\cap D}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\iint_{E\setminus D}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\iint_{E\cap D}\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\log\frac{1}{R}\,(\mathrm{m}(E)-\mathrm{m}(E\cap D)).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由于 $\mathrm{m}(E)=\mathrm{m}(D)$，根据(2)和(3)，

$$\iint_E\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\leqslant\iint_D\log\frac{1}{r}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\mathrm{m}(E)\log\sqrt{\frac{\pi\,\mathrm{e}}{\mathrm{m}(E)}}\,. \tag{4}$$

因此，若用 $\mathrm{d}\sigma(a)$ 表示曲面元，则由(4)可得

$$\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\sigma(a)\mathrm{d}\sigma(b)\leqslant[\mathrm{m}(E)]^2\log\sqrt{\frac{\pi\,\mathrm{e}}{\mathrm{m}(E)}}\,.$$

置 $\mathrm{d}\mu(a)=\mathrm{d}\sigma(a)/\mathrm{m}(E)$，则 $\mu(E)=1$. 根据 $V$ 的定义，

$$\log\frac{1}{\gamma(E)}=V\leqslant\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)\leqslant\log\sqrt{\frac{\pi\,\mathrm{e}}{\mathrm{m}(E)}}\,.$$

即得 $\gamma(E)\geqslant\sqrt{\dfrac{\mathrm{m}(E)}{\pi\,\mathrm{e}}}$. ▌

**定理** 17　设 $C$ 是复平面 $S$ 的一可求长 Jordan 弧，而 $E$ 是 $C$ 上的闭子集. 将关于弧 $C$ 的求长测度记为 $L$. 如果 $L(E)>0$，那么 $\gamma(E)>0$. 因此，若 $\gamma(E)=0$ 则 $L(E)=0$.

**证**　设 $a_0$ 是 $C$ 的两端点之一，而 $a$ 是 $C$ 上的任一点. 若将弧 $\widehat{a_0a}$ 的长度记为 $s(a)$，则对几乎所有的 $a\in C$，$\lim\limits_{b\to a}\left|\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}\right|=1$. 因此，根据 Egoroff 定理，若 $L(E)>0$，则存在 $E$ 的一闭子集 $E_1$ 使得 $L_1:=L(E_1)>0$ 且 $\lim\limits_{b\to a}\left|\dfrac{s(b)-s(a)}{b-a}\right|=1$ 关于 $a\in E_1$ 是一致的. 从而存在常数 $K>1$ 使得

$$\left|\frac{s(b)-s(a)}{b-a}\right|\leqslant K,\quad \forall\, a,b\in E_1. \tag{1}$$

设 $a\in E_1$ 是固定点，而 $b$ 是 $E_1$ 上的变点. 置 $s=s(b)-s(a)$. 类似于定理 16 可证得

$$\int_{E_1}\log\frac{1}{|s|}\,\mathrm{d}s\leqslant\int_{-L_1/2}^{L_1/2}\log\frac{1}{|s|}\,\mathrm{d}s=L_1\log\frac{2}{L_1}+L_1.$$

故 $\displaystyle\int_{E_1}\log\frac{1}{|s(b)-s(a)|}\,\mathrm{d}s(b)\leqslant L_1\log\frac{2}{L_1}+L_1.$　因此

$$\iint_{E_1}\log\frac{1}{|s(b)-s(a)|}\,\mathrm{d}s(a)\mathrm{d}s(b)\leqslant L_1^2\log\frac{2}{L_1}+L_1^2. \tag{2}$$

现在设 $\mathrm{d}\mu(a)=\mathrm{d}s(a)/L_1$，则 $\mu(E_1)=1$ 且

$$\iint_{E_1}\log\frac{1}{|s(b)-s(a)|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)\leqslant\log\frac{2}{L_1}+1. \tag{3}$$

因此由(1)可得

$$\log\frac{1}{\gamma(E_1)}=V_1\leqslant\iint_{E_1}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\mu(a)\mathrm{d}\mu(b)$$
$$\leqslant\log K+\log\frac{2}{L_1}+1=\log\frac{2K\mathrm{e}}{L_1}.$$

所以 $\gamma(E)\geqslant\gamma(E_1)\geqslant\dfrac{L_1}{2K\mathrm{e}}>0$. ▌

## §3　Evans 位势

### 1.　导体位势的基本性质

**定理 1**　(基本定理)　设 $E$ 是复平面 $S:=\{z||z|<\infty\}$ 的一具有正容量的有界闭集. 又设 $u(z)$ 是 $E$ 的导体位势. 那么

(i) $u(z)\leqslant V$, $\forall\, z\in S$;

(ii) $u(z)=V$ 除一零容 $F_\sigma$ 型集外在 $E$ 上处处成立,

其中 $V=\log\dfrac{1}{\gamma(E)}$.

**证**　首先证明 $u(z)\geqslant V$ 除一零容集外在 $E$ 上处处成立.

记 $A=\{z\in E|u(z)<V\}$、$A_n=\{z\in E|u(z)\leqslant V-1/n\}$ $(n\in N)$. 由于 $u(z)$ 是下半连续的, 故 $A_n$ 是闭集. 显然

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\to A\ (n\to\infty).$$

下面证明 $\gamma(A)=0$. 为此假设 $\gamma(A)>0$. 由于 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, 根据 §2 定理 14, 存在某个自然数 $n$ 使得 $\gamma(A_n)>0$. 于是对某适当的正数 $\varepsilon>0$, 存在 $E$ 的一子集 $E_1$ 使得

$$u(z)<V-2\varepsilon,\quad \forall\, z\in E_1,\quad \gamma(E_1)>0. \tag{1}$$

设 $\mu$ 是 $E$ 的平衡分布, 而 $E^*$ 是其支集, 则由于 $\int_{E^*}u\,\mathrm{d}\mu=V$, 必存在一 $a_0\in E^*$ 使得 $u(a_0)>V-\varepsilon$. 因此根据 (1), $a_0\overline{\in}E_1$, 又由 $u$ 的下半连续性可知存在 $a_0$ 的一邻域 $U(a_0)$ 使得

$$u(z)>V-\varepsilon,\quad \forall\, z\in U(a_0). \tag{2}$$

可将 $U(a_0)$ 取得足够小使其与 $E_1$ 距离为正的. 但 $a_0\in E^*$, 故

$$\mu(U(a_0)):=m>0. \tag{3}$$

由于 $\gamma(E_1)>0$, 故在 $E_1$ 上存在一正质量分布 $\sigma\geqslant0$ 使得

$$\left.\begin{aligned} &I(\sigma):=\iint_{E_1}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\sigma(a)\mathrm{d}\sigma(b)<\infty,\\ &\sigma(E_1)=m>0. \end{aligned}\right\}\tag{4}$$

现在，在 $E$ 上定义一质量分布 $\sigma_1$ 如下

$$\sigma_1=\begin{cases}\sigma, & \text{在 } E_1 \text{ 上；}\\ -\mu, & \text{在 } E\cap U(a_0) \text{ 上；}\\ 0, & \text{在其余处.}\end{cases}\tag{5}$$

则 $\sigma_1(E_1)=m$，$\sigma_1(U(a_0))=-m$，$\sigma_1(E)=0$，且

$$I(\sigma_1):=\iint_E\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\sigma_1(a)\mathrm{d}\sigma_1(b)\neq\infty.\tag{6}$$

而且，对于数 $\eta\in(0,1)$ 有

$$\mu+\eta\,\sigma_1\geqslant 0\quad\text{和}\quad\int_E\mathrm{d}(\mu+\eta\,\sigma_1)=1.$$

根据 (1)、(2)和 (6)，如果 $\eta>0$ 足够小，则有

$$\begin{aligned} I(\mu+\eta\,\sigma_1)-I(\mu)&=2\eta\int_E u\,\mathrm{d}\sigma_1+\eta^2 I(\sigma_1)\\ &=2\eta\left(\int_{E_1}u\,\mathrm{d}\sigma_1+\int_{U(a_0)}u\,\mathrm{d}\sigma_1\right)+\eta^2 I(\sigma_1)\\ &<2\eta\,[m(V-2\varepsilon)-m(V-\varepsilon)]+\eta^2 I(\sigma_1)\\ &=-\eta\,(2\,m\,\varepsilon-\eta\,I(\sigma_1))<0, \end{aligned}$$

这与 $I(\mu)$ 的定义相矛盾. 故在 $E$ 上除一零容集外 $u(z)\geqslant V$.

其次证明 $u(z)\leqslant V$ 在 $E^*$ 上处处成立.

为此，假设存在某点 $a_0\in E^*$ 使得 $u(a_0)>V$，则根据 $u$ 的下半连续性，存在一正数 $\varepsilon$ 和 $a_0$ 的一邻域 $U(a_0)$ 使得

$$u(z)>V+\varepsilon,\quad \forall\, z\in U(a_0).$$

根据定理 13，任一零容集不含正质量，故可得下面矛盾

$$\begin{aligned} V&=\int_{E^*\cap U(a_0)}u\,\mathrm{d}\mu+\int_{E^*\setminus U(a_0)}u\,\mathrm{d}\mu\\ &>(V+\varepsilon)\mu(U(a_0))+V[1-\mu(U(a_0))] \end{aligned}$$

$$= V + \varepsilon\mu(U(a_0)) > V.$$

因此在 $E^*$ 上 $u(z)\leqslant V$. 根据最大值原理，在 $z$-平面上 $u(z)\leqslant V$.

综上所述，$u(z)=V$ 除一零容集外在 $E$ 上处处成立.

最后，由 $u(z)$ 的下半连续性知集 $A$ 是 $F_\sigma$ 集. ▌

由 $u(z)\leqslant V$ 和 $u$ 的下半连续性可得：

**定理 2**　若 $u(a_0)=V$，则 $u(z)$ 在 $a_0$ 点连续.

**定理 3**　若 $a_0$ 是 $E$ 的内点，则 $u(a_0)=V$. 因此

$$\mu(E^0) = 0,$$

其中 $E^0$ 表示 $E$ 的内部.

**证**　设 $U(a_0)$ 是 $a_0$ 的包含在 $E$ 的内部 $E^0$ 内的一个邻域，其面积表示为 $|U(a_0)|$. 由于 $u$ 是上调和的，则

$$\frac{1}{|U(a_0)|}\iint_{U(a_0)} u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant u(a_0) \leqslant V. \tag{1}$$

由于除去一 $F_\sigma$ 零容集外 $u(z)=V$ 在 $E$ 上处处成立，根据定理 1，$u(z)=V$ 在 $U(a_0)$ 上除一零容集外处处成立. 因此式(1)的左边等于 $V$，所以 $u(a_0)=V$. 从而 $u(z)=V$ 在 $E^0$ 上处处成立. 根据 § 2 定理 3，$\mu(E^0)=0$. ▌

**注**　$\mu(E^0)=0$ 的含意为 $\mu$ 的质量全部集中在 $E$ 的边界上.

**定理 4**　若 $E$ 是正容量的有界闭集，而 $v$ 是 $E$ 上的总质量为 1 的正质量分布. 置

$$w(z) = \int_E \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}v(a), \quad v(E) = 1.$$

若记　$V=\log\dfrac{1}{\gamma(E)}$，　则　$\inf\limits_{z\in E} w(z)\leqslant V\leqslant \sup\limits_{z\in E} w(z)$.

**证**　设 $\mu$ 是 $E$ 的平衡分布，而其导体位势

$$u(z) = \int_E \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a), \quad \mu(E) = 1.$$

假设 $E\subset\{z\mid |z|\leqslant 1/2\}$，则对任意 $a$、$b\in E$，$\log\frac{1}{|a-b|}\geqslant 0$. 所以

$$\int_E u\,\mathrm{d}v=\int_E w\,\mathrm{d}\mu.$$

又由于 $u\leqslant V$、$\int_E u\,\mathrm{d}v\leqslant V$，故 $\int_E w\,\mathrm{d}\mu\leqslant V$. 因此

$$\inf_{z\in E} w(z)\leqslant V. \tag{1}$$

为证 $\sup_{z\in E} w(z)\geqslant V$，不妨设 $\sup_{z\in E} w(z)<+\infty$. 则 $I(v)<+\infty$. 由于零容集不包含正质量. 而且在 $E$ 上除一零容集外 $u(z)=V$，则 $\int_E u\,\mathrm{d}v=V$，因此 $\int_E w\,\mathrm{d}\mu=V$，从而 $\sup_{z\in E} w(z)\geqslant V$. ▌

**定理 5**　在定理 4 条件下，设 $w(z)$ 与定理 4 中相同，则集 $E_1:=\{z\mid w(z)=\infty,\ z\in E\}$ 为零容集.

**证**　假设 $\gamma(E_1)>0$，不妨设 $E_1$ 是紧致的. 设 $u_1(z)$ 是 $E_1$ 的导体位势，而 $\mu_1$ 是其平衡分布. 则与前面相同，

$$\int_E u_1\,\mathrm{d}v=\int_{E_1} w\,\mathrm{d}\mu_1=+\infty.$$

但由于 $u_1\leqslant V_1=\log 1/\gamma(E_1)$，则 $\int_E u_1\,\mathrm{d}v<\infty$. 矛盾. ▌

**定理 6**　设 $E_n\,(n=1,2\cdots)$ 是一包含于 $\overline{O(0,1/2)}$ 中的 Borel 集列. 记 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则

$$\frac{1}{\log 1/\gamma(E)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 1/\gamma(E_n)}.$$

**证**　不妨设 $E$、$E_n$ 是紧致的，且 $\gamma(E)>0$、$\gamma(E_n)>0$. 设

$$u(z)=\int_E\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a),\qquad \mu(E)=1$$

是 $E$ 的导体位势，则对任意 $a\in E$、$z\in E$，$\log\frac{1}{|z-a|}\geqslant 0$. 故对任意 $z\in E_n$ 有

$$\log\frac{1}{\gamma(E)}=V(E)\geqslant u(z)\geqslant u_n(z)=\int_{E_n}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a).$$

所以根据定理 4， $V(E)\geqslant\sup\limits_{z\in E_n}u_n(z)\geqslant V(E_n)\mu(E_n)$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V(E)}{V(E_n)}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)\geqslant\mu(E)=1,$$

即得 $\dfrac{1}{V(E)}\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{V(E_n)}$，从而

$$\frac{1}{\log 1/\gamma(E)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 1/\gamma(E_n)}.\ \blacksquare$$

**定理 7**　设 $E$ 和 $e$ 都是 Borel 集. 若 $\gamma(e)=0$，则

$$\gamma(E\cup e)=\gamma(E),\quad \gamma(E\backslash e)=\gamma(E).$$

**证**　不妨设 $E\cup e$ 包含于$\overline{O(0,1/2)}$之中. 于是

$$\frac{1}{\log 1/\gamma(E\cup e)}\leqslant\frac{1}{\log 1/\gamma(E)}+\frac{1}{\log 1/\gamma(e)}\leqslant\frac{1}{\log 1/\gamma(E)},$$

故 $\gamma(E\cup e)\leqslant\gamma(E)$. 显然 $\gamma(E\cup e)\geqslant\gamma(E)$，从而 $\gamma(E\cup e)=\gamma(E)$. 类似可证 $\gamma(E\backslash e)=\gamma(E)$. ▌

### 2. 超限直径

用 $C_n^2$ 表示组合数. 设 $E$ 是 $z$-平面上包含无限个点的有界闭集. 对 $E$ 中任意有限点$\{z_i\}_{i=1}^n$，置

$$\left.\begin{aligned}&V(z_1,\cdots,z_n)=\prod_{i<k}^{1,\cdots,n}|z_i-z_k|,\\&V_n=\max_{z_i\in E}V(z_1,\cdots,z_n),\qquad d_n=V_n^{1/C_n^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(*)$$

**定理 8**　$d_{n+1}\leqslant d_n$. 故 $\tau(E):=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$ 存在，称为 $E$ 的<u>超限直径</u>.

**证**　设 $V(z_1,\cdots,z_{n+1})$在点 $\zeta_i\in E$ $(i=1,\cdots,n+1)$达最大值

$V_{n+1}$，则

$$V_{n+1}=\prod_{i<k}^{1,\cdots,n+1}|\xi_i-\xi_k|$$
$$=|(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_{n+1})|V(\xi_2,\cdots,\xi_{n+1})$$
$$\leqslant|(\xi_1-\xi_2)\cdots(\xi_1-\xi_{n+1})|V_n.$$

类似地可得

$$V_{n+1}\leqslant|(\xi_2-\xi_1)\cdots(\xi_2-\xi_{n+1})|V_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_{n+1}\leqslant|(\xi_{n+1}-\xi_1)\cdots(\xi_{n+1}-\xi_n)|V_n.$$

将上面不等式相乘后即得

$$V_{n+1}^{n+1}\leqslant V_n^{n+1}V_{n+1}^2,\qquad V_{n+1}^{n-1}\leqslant V_n^{n-1}.$$

由此可得 $d_{n+1}\leqslant d_n$. ▌

下面考虑形如

$$P(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n$$

的多项式. 若置

$$\mu(P)=\max_{z\in E}|P(z)|,\qquad m_n=\inf_P\mu(P).\tag{1}$$

则存在多项式 $T_n(z):=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 使得

$$\mu(T_n)=\max_{z\in E}|T_n(z)|=m_n.\tag{2}$$

其证明如下：根据定义，存在多项式 $P_v(z):=z^n+b_1^{(v)}z^{n-1}+\cdots+b_n^{(v)}$ 使得 $\mu(P_v)\to m_n\ (v\to\infty)$. 则在 $E$ 上 $|P_v(z)|\leqslant M\ (v=1,2,\cdots)$. 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是 $E$ 上的 $n$ 个点，那么

$$\xi_i^n+b_1^{(v)}\xi_i^{n-1}+\cdots+b_n^{(v)}=P_v(\xi_i)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

因为 $|P_v(\xi_i)|\leqslant M$，故对每个 $j\ (1\leqslant j\leqslant n)$ $b_j^{(v)}$ 关于 $v=1,2,\cdots$ 有界. 于是可从 $\{b_j^{(v)}\}_v$ 中选一子列，仍记为 $\{b_j^{(v)}\}_v$，使得极限 $\lim\limits_{v\to\infty}b_j^{(v)}:=a_j$ 存在. 置 $T_n(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $\mu(T_n)=m_n$.

$T_n(z)$ 称为 $E$ 的 $n$ 阶Tchebycheff 多项式.

**定理 9**　　$\tau(E)=\gamma(E)$.

**证** 根据式(*),

$$\log\frac{1}{d_n}=\min_{z_i\in E}\frac{1}{C_n^2}\sum_{i<k}^{1,\cdots,n}\log\frac{1}{|z_i-z_k|}. \tag{1}$$

设 $T_n(z):=\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)$ 是 $E$ 的 $n$ 阶 Tchebycheff 多项式. 记 $m_n=\max_{z\in E}|T_n(z)|$、$r_n=\sqrt[n]{m_n}$. 则

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{1}{r_n}&=\min_{z\in E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-a_i|}\\&=\max_{|z_i|<\infty}\min_{z\in E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-z_i|},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

下面按三步证明.

1) 先证明 $\gamma(E)\leqslant r_n$. 设

$$v(z)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\frac{1}{|z-a_i|}.$$

记 $D_n=\{z\mid v(z)\geqslant\log 1/r_n\}$. 则由(2)得 $E\subset D_n$. 另, $v(z)$ 可表为

$$v(z)=\int_{D_n}\log\frac{1}{|z-a|}d\omega(a),\quad \omega(D_n)=1,$$

其中当 $a=a_i$ 时 $d\omega(a)=1/n$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 而其余处 $d\omega(a)=0$. 因此, 根据定理 4,

$$\log\frac{1}{r_n}=\inf_{z\in D_n}v(z)\leqslant V(D_n):=\log\frac{1}{\gamma(D_n)}.$$

所以 $\gamma(D_n)\leqslant r_n$. 又由于 $E\subset D_n$, 故 $\gamma(E)\leqslant\gamma(D_n)\leqslant r_n$.

2) 其次证明 $r_n\leqslant d_n$. 取 $E$ 上 $n+1$ 个点 $z_1,z_2,\cdots,z_{n+1}$ 使得

$$\left.\begin{aligned}C_{n+1}^2\log\frac{1}{d_{n+1}}&=\sum_{i<j}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z_i-z_j|}\\-\frac{1}{2}\sum_{i,j(i\neq j)}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z_i-z_j|}&=\frac{1}{2}\sum_{k}^{n+1}\sum_{i(i\neq k)}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z_i-z_k|}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

如果固定 $z_1,z_2,\cdots,z_{k-1},z_{k+1},\cdots,z_{n+1}$, 则由(1)得

$$\sum_{i(i\neq k)}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z_i-z_k|}=\min_{z\in E}\sum_{i(i\neq k)}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z-z_i|}.$$

故由(2)得 $\displaystyle\sum_{i(i\neq k)}^{1,\cdots,n+1}\log\frac{1}{|z_i-z_k|}\leqslant n\log\frac{1}{r_n}$. 而由(3)得

$$C_{n+1}^2\log\frac{1}{d_{n+1}}\leqslant\frac{n(n+1)}{2}\log\frac{1}{r_n},$$

故 $r_n\leqslant d_{n+1}$.

由 1)、2)可得 $\gamma(E)\leqslant d_{n+1}$. 令 $n\to\infty$即得 $\gamma(E)\leqslant\tau(E)$.

3) 最后证明 $\tau(E)\leqslant\gamma(E)$. 根据§1 定理 9, 对任意 $\delta>0$, 存在包含 $E$ 的开集 $D$ 使得 $\gamma(\overline{D})\leqslant\gamma(E)+\delta$. 取 $E$ 上 $n$ 个点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 并置 $\Delta_i=\overline{O(z_i,\varepsilon)}(\varepsilon=1/\sqrt{\pi n})$, 则 $\sigma(\Delta_i)=1/n$, 其中 $\sigma(\Delta_i)$ 表示 $\Delta_i$ 的面积. 取 $n$ 足够大使得所有的 $\Delta_i\,(i=1,\cdots,n)$ 都包含在 $D$ 中. 定义 $D$ 上的密度 $\rho_i(a)\ (i=1,\cdots,n)$ 如下: 当 $a\in\Delta_i$ 时, $\rho_i(a)=1$; 当 $a\in D\setminus\Delta_i$ 时, $\rho_i(a)=0$. 置 $\rho(a)=\sum_{i=1}^{n}\rho_i(a)$, 则

$$\int_D\rho(a)\,\mathrm{d}\sigma(a)=1,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma(a)$ 是面积元. 因此

$$\left.\begin{aligned}\log\frac{1}{\gamma(E)+\delta}&\leqslant\log\frac{1}{\gamma(\overline{D})}=V(\overline{D})\\&\leqslant\iint_D\log\frac{1}{|a-b|}\rho(a)\rho(b)\,\mathrm{d}\sigma(a)\mathrm{d}\sigma(b)\\&=\sum_{j=1}^{n}\int_{\Delta_j}\mathrm{d}\sigma(a)\sum_{i=1}^{n}\int_{\Delta_i}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\sigma(b).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由于对固定的 $a$, $\log\dfrac{1}{|a-b|}$关于 $b$ 是上调和的, 因此

$$\begin{aligned}&\int_{\Delta_i}\log\frac{1}{|a-b|}\,\mathrm{d}\sigma(b)\\&\leqslant\sigma(\Delta_i)\log\frac{1}{|a-z_i|}=\frac{1}{n}\log\frac{1}{|a-z_i|}.\end{aligned}$$

故 $$\log\frac{1}{\gamma(E)+\delta}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i,j}^{1,\cdots,n}\int_{\Delta_j}\log\frac{1}{|a-z_i|}d\sigma(a). \tag{5}$$

又由于 $\log\frac{1}{|a-z_i|}$ 关于 $a$ 是上调和的，故当 $i\neq j$ 时

$$\int_{\Delta_j}\log\frac{1}{|a-z_i|}\,d\sigma(a)$$
$$\leqslant\sigma(\Delta_j)\log\frac{1}{|z_j-z_i|}=\frac{1}{n}\log\frac{1}{|z_j-z_i|};$$

而当 $i=j$ 时

$$\int_{\Delta_i}\log\frac{1}{|a-z_i|}\,d\sigma(a)=\pi\varepsilon^2\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\pi\varepsilon^2}{2}=O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

所以由 (5)可得

$$\log\frac{1}{\gamma(E)+\delta}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i<j}^{1,\cdots,n}\log\frac{1}{|z_j-z_i|}+O(\log n)\right)$$
$$=\frac{2}{n^2}\sum_{i<j}^{1,\cdots,n}\log\frac{1}{|z_j-z_i|}+O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

如果选取 $z_i$ 使得

$$\sum_{i<j}^{1,\cdots,n}\log\frac{1}{|z_j-z_i|}=C_n^2\log\frac{1}{d_n},$$

那么 $\log\frac{1}{\gamma(E)+\delta}\leqslant\frac{n-1}{n}\log\frac{1}{d_n}+O\left(\frac{\log n}{n}\right)$. 先令 $n\to\infty$，然后令 $\delta\to 0$，即可得 $\tau(E)\leqslant\gamma(E)$. ▌

**注** 可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 存在. 若将其记为 $\rho(E)$，则从上面证明过程可得 $\tau(E)=\rho(E)=\gamma(E)$.

### 3. Evans 定理

**定理** 10 设 $E$ 是 $z$-平面上的零容有界闭集，则存在 $E$ 上的总质量为 1 的正质量分布 $\mu$ 使得当 $z$ 趋于 $E$ 中任一点时，函数

$$u(z) := \int_E \log \frac{1}{|z-a|} \, d\mu(a)$$

趋于 $+\infty$.

称 $u(z)$ 为关于 $E$ 的Evans 位势或Evans 函数.

**证**　取 $E$ 中的 $n$ 个点 $\{z_i\}_{i=1}^n$, 置

$$\left.\begin{aligned} &V(z_1,\cdots,z_n) = \prod_{i<k}^{1,\cdots,n} |z_i - z_k|, \\ &V_n = \max_{z_i \in E} V(z_1,\cdots,z_n), \quad d_n = V_n^{1/C_n^2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

则
$$d_n \to \tau(E) = \gamma(E) = 0 \quad (n \to \infty). \tag{2}$$

现另取 $E$ 中的 $n$ 个点 $\{a_\nu\}_{\nu=1}^n$, 置

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{n} |z - a_\nu|, \qquad \mu^*(P) = \max_{z\in E} |P(z)|, \tag{3}$$

$$m_n^* = \inf_P \mu^*(P).$$

注意到对于 Tchebycheff 多项式, $a_\nu$ 可以是 $z$-平面上的任意点.

容易证明, 存在多项式 $T_n^*(z) := \prod_{\nu=1}^{n} |z - a_\nu^0|$ $(a_\nu^0 \in E)$ 使得

$$m_n^* = \mu^*(T_n^*) = \max_{z\in E} |T_n^*(z)|. \tag{4}$$

设 $V_{n+1}$ 在 $E$ 中的 $n+1$ 个点 $a_1,\cdots,a_{n+1}$ 处取到, 则

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V(a_1,\cdots,a_{n+1}) \\ &= |(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})| V(a_2,\cdots,a_{n+1}). \end{aligned}$$

若置 $P(z) = (z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_{n+1})$, 则根据定义,

$$|(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})| = \max_{z\in E} |P(z)| \geqslant m_n^*. \tag{5}$$

如果依次用 $a_i$ 代替 $a_1$ 进行讨论, 那么可得另外 $n$ 个类似的不等式. 将这 $n+1$ 个不等式两边分别相乘即得

$$V_{n+1}^2 \geqslant (m_n^*)^{n+1}, \qquad d_{n+1} \geqslant \sqrt[n]{m_n^*}.$$

故由 (2)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m_n^*}=0. \tag{6}$$

现在考虑函数

$$\left.\begin{aligned} v_n(z):&=\frac{1}{n}\log\frac{1}{|T_n^*(z)|}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{1}{|z-a_\nu^0|}\\ &=\int_E\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_n(a),\qquad \mu_n(E)=1,\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中 $\mu$ 是 $E$ 上的正质量分布，满足条件：在 $a=a_\nu^0$ 处 $\mathrm{d}\mu_n(a)=1/n$ $(\nu=1,\cdots,n)$；而在其余处 $\mathrm{d}\mu_n(a)=0$. 于是根据(4)

$$v_n(z)\geqslant M_n^*:=\frac{1}{n}\log\frac{1}{|m_n^*|},\quad \forall\, z\in E. \tag{8}$$

由(6)得 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n^*=\infty$，故可找到数列 $\{n_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ 使得 $M_{n_\nu}^*\geqslant 2^\nu$. 因此，如果令 $u_\nu(z)=\frac{1}{2^\nu}v_{n_\nu}(z)$，则在 $E$ 上 $u_\nu(z)\geqslant 1$. 于是根据(7)，函数

$$u(z):=\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu(z) \tag{9}$$

是 $E$ 上的总质量为 1 的正质量分布的位势，且由于在 $E$ 上成立着 $u_\nu(z)\geqslant 1$，于是得在 $E$ 上 $u(z)=+\infty$. 最后，由于 $u(z)$ 是下半连续的，则当 $z$ 趋于 $E$ 中任一点时 $u(z)$ 趋于$+\infty$. ▌

# §4　容量与扫除

## 1.　连续半调和函数的最大值原理

**定理 1**　(最大值原理)　设 $D$ 是闭 Riemann 曲面 $F$ 的一个区域，边界为 $\Gamma$，而 $e$ 是 $\Gamma$ 上的一个零容集. 设 $u(z)$ 是 $D$ 内一个连续的、上有界的下调和(对应地，下有界的上调和)函数. 若存在数 $M$，使得当 $z$ 从 $D$ 内趋于任一点 $\zeta\in\Gamma\setminus e$ 时 $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, u(z)\leqslant M$ (对应地，$\underline{\lim\limits_{z\to\zeta}}\, u(z)\geqslant M$)，则在 $D$ 内 $u(z)\leqslant M$ (对应地，$u(z)\geqslant M$).

**注**　如果将定理中的上、下调和分别都改为调和，那么对应的结论也分别成立.

**证**　只证下调和的情形.

不妨设 $e\neq\varnothing$. 假设 $\sup\limits_{z\in D} u(z)>M$，并记 $M'=\sup\limits_{z\in D} u(z)$. 于是存在 $D$ 内的点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $u(z_n)>\dfrac{M'+M}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u(z_n)=M'$. 又记 $\eta_n=M'-u(z_n)$，则有 $\eta_n\to 0\ (n\to\infty)$.　下面将导出矛盾.

显然$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$有子列收敛某点 $z_0\in F$. 不妨设 $z_0$ 非 $F$ 的支点且 $z_n\to z_0\ (n\to\infty)$. 由条件可得 $z_0\in e$. 设 $U:=\{z\,|\,|z-z_0|\leqslant\rho<1/2\}$ 包含在 $z_0$ 的一参数邻域内. 将开集$\{z\,|\,u(z)>M_n,\ z\in D\}$之包含 $z_n$ 的分支记为 $D_n$，其中 $M_n=M'-2\eta_n$. 又将 $D_n$ 的边界记为 $\Gamma_n$，并置 $\Gamma_n'=\Gamma_n\cap D$. 则在 $\Gamma_n'$ 上 $u(z)=M_n$. 由于当 $n\to\infty$ 时，$D_n$ 聚集于 $z_0$，故不妨设 $D_n\subset U\ (n=1,2,\cdots)$. 记 $e_n=\Gamma_n\cap\Gamma$，则 $e_n$ 是 $e$ 的闭子集，从而是包含于 $U$ 中的零容集.

固定 $n$. 设 $v(z)$ 是关于 $e_n$ 的 Evans 位势. 置

$$w(z)=u(z)-\delta v(z),\qquad \delta>0.$$

由于 $D_n\subset U$，且在 $D_n$ 内 $v(z)>0$，所以在 $\Gamma_n^*$ 上 $w\leqslant u=M_n$. 又由于当 $z$ 趋于 $e_n$ 的任一点时 $v(z)=+\infty$，故在 $\Gamma_n$ 上 $w\leqslant M_n$. 所以，根据最大值原理，在 $D_n$ 内 $w\leqslant M_n$. 于是由 $\delta$ 的任意性可得在 $D_n$ 内有 $u\leqslant M_n$. 矛盾. ▌

**推论**　设 $u(z)$ 是 $D$ 内的有界调和函数. 如果当 $z$ 从 $D$ 内趋于任一点 $\zeta\in\Gamma\backslash e$ 时 $\lim\limits_{z\to\zeta}u(z)=0$，那么 $u(z)\equiv 0$.

## 2. 零容集关于调和函数的可去性

下述全不连通点集的性质对讨论可去集有着积极的作用.

**引理 1**　设 $E$ 是复球面上的一个全不连通闭集. 则对任意一点 $z\in E$，对 $z$ 任一足够小的邻域 $\Lambda(z)$，总存在 $\Lambda(z)$ 内的一条环绕点 $z$ 的解析 Jordan 曲线 $\sigma$ 使得 $\sigma\cap E=0$.

**证**　不妨设 $\Lambda(z)$ 是连通开集. 由于 $E$ 是全不连通闭集，故 $\Lambda(z)\backslash E$ 是弧连通的. 于是必有一分段解析的闭曲线 $\alpha$ 环绕点 $z$ 且使得 $\alpha\subset\Lambda(z)\backslash E$. 从 $\alpha$ 和 $E$ 的闭紧性以及有限复盖定理可知存在 $\alpha$ 的一个邻域 $U(\alpha)$，使得 $\overline{U(\alpha)}\subset\Lambda(z)\backslash E$ 且 $U(\alpha)$ 的边界由两条环绕着 $z$ 点的分段解析闭曲线 $\beta$ 和 $\gamma$ 组成，其中 $\gamma$ 包含在 $\beta$ 所围的区域 $G$ 内. 根据 Riemann 映照定理，可将 $G$ 一对一共形映上单位圆片 $\Delta$. 设映照函数为 $w=f(z)$. 则存在一正数 $\delta<1$ 使得圆片 $\{w\,|\,|w|<\delta\}$ 包含曲线 $f(\gamma)$ 则圆周 $\{w\,|\,|w|=\delta\}$ 的逆象 $\sigma$ 必是 $U(\alpha)$ 内的一条解析 Jordan 曲线，它满足命题中所需条件. ▌

**注**　由证明可知：对任意 $\delta'\in(\delta,1)$，圆周 $\{w\,|\,|w|=\delta'\}$ 的逆象 $\sigma'$ 必是满足命题中条件的解析 Jordan 曲线. 于是若取其中任两条，则它们所界的闭环域与 $E$ 不交.

**定理 2**　设 $E$ 是 $z$-平面上的零容量有界闭集，而 $U$ 是 $E$ 的一邻域. 若 $u(z)$ 是 $U\backslash E$ 上的有界调和（或正则）函数，则 $u(z)$ 在 $E$

上是调和的 (或正则的).

**证** 根据引理 1, 可取 $E$ 的一开邻域 $V$ 使其每个分支的边界都为一 Jordan 曲线, 且 $\bar{V}\subset U$. 对 $U\setminus E$ 上的有界调和函数 $u(z)$, 设 $v(z)$ 是以 $u(z)$ 为边值的关于 $V$ 的 Dirichlet 问题的解. 那么函数 $w(z):=u(z)-v(z)$ 在 $V\setminus E$ 上为有界调和, 且在 $\partial V$ 上 $w=0$. 根据定理 1 的推论, 有 $w\equiv 0$, 即在 $V$ 上 $u\equiv v$. 所以 $u(z)$ 在 $E$ 上是调和的. ▌

**引理 2** 设 $u(z)$是平面区域 $D$ 内的下调和函数. 若在点 $a\in D$ 处 $u(a)>-\infty$, 则 $u(a)=\overline{\lim\limits_{D\ni z\to a}}u(z)$.

**证** 根据 $u$ 的下调和性, 存在正数 $\rho$, 使得对任意 $r\in(0,\rho)$

$$u(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}u(a+re^{i\theta}).$$

于是 $u(a)\leqslant\lim\limits_{r\to 0}\sup\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}u(a+re^{i\theta})\leqslant\overline{\lim\limits_{D\ni z\to a}}u(z)$. 再根据 $u(z)$ 的上半连续性即得结论. ▌

**定理 3** 设 $E$ 是 $z$-平面上的零容有界闭集, 而 $U$ 是 $E$ 的一个邻域. 设 $u(z)$ 是 $U\setminus E$ 内的上有界的下调和函数, 如果对于任一点 $a\in E$ 定义 $u(a)=\overline{\lim\limits_{z\to a}}u(z)(z\in U\setminus E)$, 那么 $u(z)$ 是 $U$ 内的下调和函数, 且这样的延拓是唯一的.

**证** 从 $u(a)$在点 $a\in E$ 的定义即知 $u(a)$在 $U$ 内是上半连续的. 设 $D$ 是 $U$ 内的 Jordan 区域, 其边界 $\Gamma$ 由有限条 Jordan 曲线组成. 又设 $H(z)$是 $D$ 内的调和函数, 且在 $\bar{D}$ 是连续的, 而在 $\Gamma$ 上 $u\leqslant H$. 根据定义, 要证明本定理只需证明下式成立

$$u(z)\leqslant H(z),\quad \forall\, z\in D. \tag{1}$$

不妨设 $E_1:=\bar{D}\cap E\neq\varnothing$, 则 $E_1$ 是有界零容闭集. 根据 Evans 定理,在 $E_1$ 上存在一总质量为 1 的正质量分布 $\mathrm{d}\mu$ 使得函数

$$v(z):=\int_{E_1}\log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu(a)$$

当 $z$ 趋于 $E_1$ 的任意一点时趋于 $+\infty$. 通过适当的线性变换可设 $U$ 包含于开圆盘 $O(0,1/2)$ 内. 则在 $U$ 内 $v>0$.

对(足够大的)常数 $r>0$, 等位线 $\Gamma_r:=\{z \mid v(z)=r\}$ 由有限条 Jordan 曲线组成, 且当 $r\to\infty$ 时这些曲线聚集于 $E_1$. 设 $D_r$ 是以 $\Gamma\cup\Gamma_r$ 为边界的区域, 而 $H_r(z)$ 是 $D_r$ 内满足下面条件的调和函数:

1) $H_r$ 在 $\overline{D}_r$ 上连续;　2) 在 $\Gamma$ 上 $H_r=H$、在 $\Gamma_r$ 上 $u\leqslant H_r$.

由于 $u(z)$ 是 $U\setminus E$ 内的下调和函数,故

$$u(z)\leqslant H_r(z),\quad \forall\, z\in D_r. \tag{2}$$

设在 $U\setminus E$ 内 $u(z)<K$. 则可设在 $\Gamma_r$ 上 $H_r<K$. 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $r>0$ 足够大, 使得在 $\Gamma_r$ 上 $K\leqslant H(z)+\varepsilon v(z)$. 由于 $v>0$, 故在 $\Gamma\cup\Gamma_r$ 上 $H_r(z)<H(z)+\varepsilon v(z)$. 从而 $u(z)\leqslant H_r(z)<H(z)+\varepsilon v(z)$ 在 $D$ 内成立. 由 $\varepsilon$ 的任意性即得

$$u(z)\leqslant H(z),\quad \forall\, z\in D\setminus E_1. \tag{3}$$

又由于在任一点 $a\in E_1$,

$$u(a)=\varlimsup_{D\ni z\to a} u(z)\leqslant \varlimsup_{D\ni z\to a} H(z)=H(a).$$

于是式(1)得证,从而 $u(z)$ 在 $U$ 内是下调和的.

现在证明唯一性. 设 $u_1(z)$ 是 $u(z)$ 在 $U$ 内的另一下调和延拓, 则在 $U\setminus E$ 内 $u_1(z)=u(z)$. 于是根据引理 2, 对任意 $a\in E$

$$u_1(a)=\varlimsup_{D\ni z\to a} u_1(z)=\varlimsup_{D\ni z\to a} u(z)=u(a)\ \blacksquare$$

定理 2、3 中所述零容闭集的性质称为关于调和或半调和函数的<u>可去性</u>(参看第五章 § 1).

### 3. 正容量集

设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 上不包含点 $z=\infty$ 的一个紧致子集, 其余集 $K\setminus E$ 由最多可数个分支 $D_\infty$、$D_1$、$D_2$、…组成, 其中 $D_\infty$ 是包含点 $z=\infty$ 的分支. $D_\infty$ 的边界称为 $E$ 的<u>外边界</u>, 记为 $\Gamma^*$. 显然 $\Gamma^*$ 的余集 $K\setminus\Gamma^*$ 可表为最多可数个连通区域之并 $D_\infty\cup(\bigcup_{\nu=1}^{\infty}\Delta_\nu)$.

**定理 4**　设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 上不包含点 $z=\infty$ 的正容量紧致子集，而 $E^*$ 是其支集. 分别用 $\mu$ 和 $u(z)$ 表示 $E$ 的平衡分布和导体位势. 则

(i) $\mu$-质量集中在 $E$ 的外边界 $\Gamma^*$ 上，且 $\gamma(\Gamma^*\backslash E^*)=0$. 故

$$\gamma(E)=\gamma(E^*)=\gamma(\Gamma^*).$$

(ii) 在 $\Delta_v$ 内 $u(z)=V$，其中 $V=\log[1/\gamma(E)]$.

**证**　由于 $u(z)$ 在 $D_i$ 内是调和的，且在其边界上除一零容集外 $u(z)=V$ 处处成立. 根据定理 1 的推论，在 $D_i$ 内有 $u(z)=V$. 根据 § 3 定理 3，在 $E$ 的内部 $u=V$，故在 $\Delta_v$ 内除一零容集外处处成立. 根据 § 2 定理 3，$\mu(\Delta_v)=0$. 因此 $u(z)$ 是调和的，且在 $\Delta_v$ 内 $u(z)=V$. 由于 $\mu$-质量集中在 $E$ 的外边界 $\Gamma^*$ 上，故 $E^*\subset\Gamma^*$.

下面证 $\gamma(\Gamma^*\backslash E^*)=0$. 记 $E_1=(\Gamma^*\backslash E^*)$，并假设 $\gamma(E_1)>0$，则 $E_1$ 包含一正容闭集 $F$. 由于 $F$ 与 $E^*$ 的距离为正的，故在 $F$ 上 $u<V$. 但 $\gamma(F)>0$，则存在点 $z_0\in F$ 使得 $u(z_0)=V$. 故得矛盾. 于是 $\gamma(\Gamma^*\backslash E^*)=0$. 根据 § 3 定理 7，

$$\gamma(E)=\gamma(E^*)=\gamma(\Gamma^*).\quad \blacksquare$$

**定理 5**　设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 上不包含点 $z=\infty$ 的正容量紧致子集，则其平衡分布 $\mu$ 是唯一的.

**证**　假设 $E$ 有两个平衡分布 $\mu_1$、$\mu_2$，置

$$u_i(z)=\int_E\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_i(a),\ \mu_i(E)=1\ (i=1,2),$$

$$u(z)=u_1(z)-u_2(z)=\int_E\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a),\ \mu=\mu_1-\mu_2.$$

则 $u(z)$ 是 $D_\infty$ 内的有界调和函数. 又在 $D_\infty$ 的边界 $\Gamma^*$ 上除一零容集外 $u_1=u_2=V$ 处处成立，所以在 $D_\infty$ 内 $u\equiv0$. 又因为在 $\Delta_v$ 内 $u_1=u_2=V$ 且 $u=0$，所以在 $\Delta_v$ 内除一零容集外 $u=0$ 处处成立，从而在整个球面是几乎处处成立的. 据 § 2 定理 3，$\mu_1=\mu_2$. $\blacksquare$

4. **容量与 Green 函数存在之关系**

**定理 6**　设 $E$ 是 $z$-平面上具有正容量的有界闭集. 记其外边界为 $\Gamma^*$. 则 $\Gamma^*$ 含有无限多个关于 $D_\infty$ 的 Dirichlet 问题的正则点，而 $\Gamma^*$ 上的非正则点 $\Lambda$ 是一零容集.

**注**　下面定理 12 将证明 $\Lambda$ 是一 $F_\sigma$ 型集.

**证**　由于 $\gamma(\Gamma^*)=\gamma(E)>0$，则 $\Gamma^*$ 含有无限多个使 $u(a)=V$ 的点 $a$. 下面证明这样的点 $a$ 是关于 $D_\infty$ 的 Dirichlet 问题的正则点. 事实上，因为 $u(z)$ 在点 $a$ 连续，所以 $\lim\limits_{z\to\infty}(V-u(z))=0$. 由于 $V-u(z)>0$ 在 $U(a)\bigcup D_\infty$ 内是调和的，其中 $U(a)$ 是点 $a$ 的某邻域，故根据第三章 § 3 定理 14，点 $a$ 存在垒，从而点 $a$ 是关于 $D_\infty$ 的 Dirichlet 问题的正则点. 又因为 $u(a)=V$ 在 $\Gamma^*$ 上除一零容集外处处成立，所以 $\Gamma^*$ 上的非正则点 $\Lambda$ 是一零容集. ▌

**定理 7**　设 $D$ 是闭 Riemann 曲面 $F$ 的一区域，而 $\Gamma$ 是其边界且 $\gamma(\Gamma)>0$. 设 $\zeta_0\in\Gamma$，则 $\zeta_0$ 是关于 $D$ 的 Dirichlet 问题的正则点当且仅当 $\zeta_0$ 存在垒.

因此正则性是一局部性质.

**证**　充分性见第三章 § 3 定理 11.

必要性. 设 $\zeta_0\in\Gamma$ 是关于区域 $D$ 的 Dirichlet 问题的正则点. 记 $\Gamma_\rho=\Gamma\bigcap\overline{O(\zeta_0,\rho)}$. 定义函数 $f(\zeta)$ 如下：

$$\text{在 }\Gamma_\rho\text{ 上 } f(\zeta)=|\zeta-\zeta_0|/\rho,\quad \text{在 }\Gamma\setminus\Gamma_\rho\text{ 上 } f(\zeta)=1.$$

则 $f(\zeta)$ 在 $\Gamma$ 上连续. 由于 $\gamma(\Gamma)>0$，故 $\Gamma$ 含有无限多个关于 $D$ 的 Dirichlet 问题的正则点. 于是可取正数 $\rho$ 足够小使得 $\Gamma\setminus\Gamma_\rho$ 至少含有一正则点. 现在以 $f(\zeta)$ 为边值对区域 $D$ 解 Dirichlet 问题，若记 $u(z)$ 是其解，则在 $\Gamma\setminus\Gamma_\rho$ 的正则点处 $u(z)=1$. 从而 $u(z)\not\equiv 0$，故在 $D$ 内 $u(z)>0$. 由于 $\zeta_0$ 是正则点，故 $\lim\limits_{z\to\zeta_0}u(z)=0$. 因此若在第三章 § 3 定理 14 取 $w(z)=u(z)$ 即可知 $\zeta_0$ 存在垒. ▌

**定理 8** 设 $D$ 是闭 Riemann 曲面 $F$ 上的一个子区域，其边界为 $\Gamma$，则 $D$ 上存在 Green 函数当且仅当 $\Gamma$ 的容量 $\gamma(\Gamma)>0$.

**证** 假设 $D$ 上存在 Green 函数 $g(z,z_0)$，而 $\gamma(\Gamma)=0$. 不妨设 $z_0$ 非 $F$ 的支点. 由于 $g(z,z_0)$ 在 $\Gamma$ 的邻域内有界，故在 $\Gamma$ 调和，从而除去 $z_0$ 外 $g(z,z_0)$ 在 $F$ 上是调和的，且函数

$$\omega(z):=g(z,z_0)-\log\frac{1}{|z-z_0|}$$

在 $z_0$ 处调和. 但据第三章 § 4 定理 5，这样的函数 $g(z,z_0)$ 是不存在的. 为此，若 $D$ 上存在 Green 函数，则 $\gamma(\Gamma)>0$.

设 $z_0\in D$，记 $\Delta:=\overline{O(z_0,\rho)}$ 是包含在 $z_0$ 之参数邻域中的单叶闭圆盘，$C$ 为其圆周边界. 现关于 $D\backslash\Delta$ 解 Dirichlet 问题，设边界函数在 $C$ 上取值 0，在 $\Gamma$ 上取值 1，而 $u(z)$ 是其解. 由于 $\gamma(\Gamma)>0$，故 $\Gamma$ 包含正则点 $\zeta_0$，同时有 $u(\zeta_0)=1$. 所以 $u(z)\not\equiv 0$，故

$$0<u(z)<1,\quad \forall z\in D\backslash\Delta.$$

设 $D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_n\to D$ 是 $D$ 的一个穷尽，其中 $D_0=\Delta$，而且 $D_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 设 $g_n(z,z_0)$ 是 $D_n$ 的 Green 函数，则

$$\int_C\left(u\frac{\partial g_n}{\partial v}-g_n\frac{\partial u}{\partial v}\right)\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_n}\left(u\frac{\partial g_n}{\partial v}-g_n\frac{\partial u}{\partial v}\right)\mathrm{d}s=0,$$

其中 $v$ 是关于 $D_n\backslash\Delta$ 的内法向.

由于在 $\Gamma_n$ 上 $g_n=0$，且在 $C$ 上 $u=0$，则有

$$\int_C g_n\frac{\partial u}{\partial v}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_n}u\frac{\partial g_n}{\partial v}\mathrm{d}s\leqslant\int_{\Gamma_n}\frac{\partial g_n}{\partial v}\mathrm{d}s=2\pi.$$

所以，若记 $g=g(z,z_0)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(z,z_0)$，则

$$\int_C g\frac{\partial u}{\partial v}\mathrm{d}s\leqslant 2\pi.$$

因此 $g\not\equiv\infty$，于是 $D$ 上的 Green 函数存在. ▌

**定理 9** 设 $D$ 是闭 Riemann 曲面 $F$ 的一子区域，而 $\Gamma$ 是其边

界且 $\gamma(\Gamma)>0$. 记 $g(z,z_0)$ 为区域 $D$ 的 Green 函数. 又设 $\zeta_0\in\Gamma$，则 $\zeta_0$ 是关于 $D$ 的 Dirichlet 问题的正则点当且仅当

$$\lim_{z\to\zeta_0} g(z,z_0)=0,\ z\in D.$$

**证**　若 $\zeta_0\in\Gamma$ 是关于 $D$ 的 Dirichlet 问题的正则点，则 $\zeta_0$ 存在垒. 根据第三章 §4 定理 3，$\lim\limits_{z\to\zeta_0} g(z,z_0)=0$.

反之，若 $\lim\limits_{z\to\zeta_0} g(z,z_0)=0$，则由于在 $\zeta_0$ 的某邻域内 $g(z,z_0)>0$ 且为调和的，根据第三章 §3 定理 14，$\zeta_0$ 是正则点. ▌

**定理 10**　设 $E$ 是 $z$-平面上具有正容量的有界闭集. 若将区域 $D_\infty$ 以 $z=\infty$ 为极的 Green 函数记为 $g(z,\infty)$. 则

$$g(z,\infty)=V-u(z),$$

其中 $V=\log 1/\gamma(E)$，而 $u(z)$ 是 $E$ 的导体位势.

**证**　设 $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $D_\infty$ 的一穷尽，其中 $z=\infty$ 包含于每个 $D_n$ 之中，且 $D_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 记 $g_n(z,\infty)$ 是以 $z=\infty$ 为极区域 $D_n$ 的 Green 函数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z,\infty)=g(z,\infty)$.

由于 $V-u(z)-g_n(z,\infty)$ 在区域 $D_n$ 内是调和的，而在区域 $D_\infty$ 内 $V-u(z)>0$；又在 $\Gamma_n$ 上 $g_n(z,\infty)=0$，故根据最大值原理，在区域 $D_n$ 内 $V-u(z)\geqslant g_n(z,\infty)$，则

$$V-u(z)\geqslant g(z,\infty),\quad \forall\, z\in D_\infty.$$

设 $a$ 是 $D_\infty$ 的边界 $\Gamma^*$ 上使得 $u(a)=V$ 的点，则 $u(z)$ 在点 $a$ 处连续. 从而 $\lim\limits_{z\to a}[V-u(z)]=0$，故 $\lim\limits_{z\to a} g(z,\infty)=0$. 于是

$$V-u(z)-g(z,\infty)$$

是 $D_\infty$ 内的有界调和函数，它在 $\Gamma^*$ 上除一零容集外处处为 0. 所以 $V-u(z)-g(z,\infty)\equiv 0$，即得 $g(z,\infty)=V-u(z)$. ▌

设 $u(z)=\displaystyle\int_E \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu(a)$，$\mu(E)=1$，则

$$g(z,\infty) = V - u(z) = \log|z| + V - \int_E \log\left|\frac{z}{z-a}\right| \mathrm{d}\mu(a),$$
$$\omega(\infty) = \lim_{z\to\infty}[g(z,\infty) - \log|z|] = V,$$

其中 $\omega(\infty)$是 $D_\infty$ 在 $z=\infty$处的 Robin 常数. 于是有

**推论**　设 $E$ 是 $z$-平面上具有正容量的有界闭集，则

$$\omega(\infty) = V = \log 1/\gamma(E).$$

其中 $\omega(\infty)$是 $D_\infty$ 在 $z=\infty$处的 Robin 常数.

**定理** 11　设 $E$ 是 $z$-平面上具有正容量的有界闭集，而 $u(z)$ 是 $E$ 的导体位势. 设 $a_0$ 是 $E$ 的外边界 $\Gamma^*$ 上的一点，则 $a_0$ 是关于 $D_\infty$ 的 Dirichlet 问题的正则点当且仅当

$$u(a_0) = V = \log\frac{1}{\gamma(E)}.$$

于是 $\Gamma^*$ 上的非正则点组成一零容 $F_\sigma$ 型集.

**证**　若 $u(a_0)=V$，根据定理 9、10，$a_0$ 是一正则点. 反之，若 $a_0$ 是一正则点，要证 $u(a_0)=V$. 事实上，由 $a_0$ 是一正则点可得

$$\lim_{z\to a_0} g(z,\infty) = \lim_{z\to a_0}[V - u(z)] = 0, \quad \forall z \in D_\infty. \tag{1}$$

设 $U$ 是点 $a_0$ 的某邻域. 由于 $u(a)$是上调和的，则

$$\frac{1}{|U|}\iint_U u(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant u(z_0). \tag{2}$$

又因为 $u=V$ 在 $D_\infty$ 的余集上除一零容集外处处成立，所以由式(1)、(2)可得 $V\leqslant u(z_0)$. 但显然 $u(z_0)\leqslant V$，故 $u(z_0)=V$.

因此，$\Gamma^*$ 上的非正则点即为使得 $u(a)<V$ 的那些点 $a$. 故由 $u(z)$的下半连续性可知 $\Gamma^*$ 上的非正则点是一零容 $F_\sigma$ 型集. ▌

## 5. 映照半径

**定理** 12　设 $E$ 是复 $z$-平面 $S$ 上的有界连续统. 记 $D_\infty$ 是 $S\backslash E$ 的包含 $\infty$ 的分支. 若 $w=w(z)$ 是将 $D_\infty$ 一对一共形映上 $w$-平面

区域 $\{w||w|>R\}$，且使得

$$w(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots,\ 在\ z=\infty,$$

则　　$R=\gamma(E)$.

$R$ 称为 $E$ 的映照半径.

**证**　设 $u(z)$ 是 $E$ 的导体位势，置

$$v(z)=u(z)-\log\frac{1}{|w(z)|},\quad V=\log\frac{1}{\gamma(E)}.$$

则 $v(z)$ 在 $D_\infty$ 内有界调和，且在 $D_\infty$ 的边界 $\Gamma^*$ 上 $v=V-\log\frac{1}{R}$. 于是 $v(z)\equiv\text{const.}=V-\log\frac{1}{R}$. 但 $v(\infty)=0$，故 const. $=0$. 所以 $V=\log\frac{1}{R}$，即 $R=\gamma(E)$. ▌

**推论 1**　设 $\Delta$ 是闭圆盘 $\overline{O(0,R)}$，而 $C$ 为其边界圆周. 则

$$\gamma(\Delta)=\gamma(C)=R.$$

设 $E$ 是一正容集，而 $p\in E$. 若对于 $p$ 的任意邻域 $U$，$E\cap U$ 都是正容集，则称 $p$ 是 $E$ 的正容点. 从推论 1 可知正容集有无限个正容点，且全体正容点之集是己密的，从而是不可数的.

**推论 2**　设 $\alpha$ 是圆周 $\{z||z|=R\}$ 的一弧段，若其对应的圆心角为 $\theta$，则

$$\gamma(\alpha)=R\sin\theta/4.$$

**推论 3**　设 $J$ 是一长为 $L$ 的直线段，则 $\gamma(J)=L/4$.

**证**　不妨设 $J=\{z=x+iy|-L/2\leqslant x\leqslant L/2,\ y=0\}$. 映照 $z=L(v+1/v)/4$ 将 $J$ 的外部映上 $\{v||v|>1\}$. 若设 $w=Lv/4$，则映照 $z=w+L^2/(16w)$ 将 $J$ 的外部映上 $\{w||w|>L/4\}$，且

$$w(z)=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots,\ 在\ z=\infty.$$

故 $\gamma(J)=L/4$. ▌

**推论 4**　设 $E$ 是 $x$-轴上的有界闭集，其线性测度为 $L$，则

$$\gamma(E) \geqslant L/4.$$

**证**　设 $E\subset[a,b]$，$E_x=E\cap[a,x]$. 若记 $L(x)$ 为 $E_x$ 的线性测度，则映照 $t=L(x)$ 将 $E$ 映上 $t$ 轴上的线段 $J:=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant L\}$. 在 $J$ 上取 $n$ 个点 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n=L$，并设 $t_i=L(x_i)$，$x_i\in E$. 则有 $|t_i-t_k|\leqslant|x_i-x_k|$. 所以，对比超限直径即得

$$L/4=\gamma(J)\leqslant\gamma(E). \ ▌$$

**推论 5**　设 $E$ 是 $z$-平面上一连续统. 若 $\delta(E)$ 是其直径，则

$$\gamma(E) \geqslant \delta(E)/4.$$

**证**　通过适当选择坐标轴，可设 $E$ 可以被投影到 $x$-轴上的长为 $\delta(E)$ 的闭线段 $[a,b]$，$b-a=\delta(E)$.

现在取 $n$ 个点 $a=x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，并通过每个 $x_i$ 作一条与 $y$-轴平行的直线. 由于 $E$ 是一连续统，故该直线与 $E$ 至少相交于一点 $z_i$. 则 $|z_i-z_k|\geqslant|x_i-x_k|$. 所以，根据推论 3 并对比超限直径即得 $\gamma(E)\geqslant\delta(E)/4$. ▌

由推论 5 可知，任何平面连续统都具有正容量. 又，类似可证：

**推论 6**　设 $E$ 是 $z=x+iy$-平面上的有界闭集. 又设 $E^{(x)}$ 是正 $x$-轴上使得 $\{z\,|\,|z|=r\}\cap E\neq\varnothing$ 的数 $r$ 所成之集. 若 $L$ 是 $E^{(x)}$ 线性测度，则

$$\gamma(E)\geqslant\gamma(E^{(x)})\geqslant L/4,$$

等号当且仅当 $E$ 是射线$\{z\,|\arg z=\text{const.}\}$上长为 $L$ 的线段时成立.

**注**　由推论 6 可得：若 $\gamma(E)=0$，则 $L=0$. 但是其逆不真，因为存在正容量的线性零测集(参看第七章 § 5 定理 3). 另外还可推出著名的Koebe 1/4-圆定理的推广，现陈述如下.

**定理** 13　设开单位圆盘 $U:=\{z \mid |z|<1\}$ 内给定一正则函数

$$w=f(z)=z+a_2z^2+\cdots$$

其值域记为 $D_f:=f(U)$. 若设 $E$ 是由满足条件 $\{w \mid |w|=r\}\subset D_f$ 的非负数 $r$ 全体所组成，则

$$\mathrm{mes}(E)\geqslant 1/4.$$

等号当且仅当 $w=f_a(z)=\dfrac{z}{(1+ze^{i\alpha})^2}$ 时成立. 此时 $w=f_a(z)$ 将单位圆 $U$ 共形映上除去射线 $L_{-\alpha}:=\{w \mid w=\rho e^{i\alpha}, 1/4\leqslant\rho\leqslant\infty\}$ 外的 $w$-整个平面.

因此，如果 $f(z)\neq f_a(z)$，那么存在 $r\geqslant 1/4$ 使得 $D_f$ 将整个圆周 $\{w \mid |w|=r\}$ 包含于其内.

## 6.　单位圆周上容量为 1 的真子集

在单位圆周上取两子集如下：

$$E_1':=\{z=e^{i\theta} \mid |\theta-\theta_0|<2/\lambda\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\},\tag{1}$$

$$E_n':=\{z=e^{i\theta} \mid |n\theta-\theta_0|<2/\lambda\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}.\tag{2}$$

众所周知，半径为 1 而长度为 $4/\lambda$ 的闭弧的容量是 $\sin 1/\lambda$；有限条开弧的容量与闭弧的容量相等. 如果设 $u(z)$是 $E_1'$ 的平衡位势，那么$\dfrac{1}{n}u(z^n)$是 $E_n'$ 的平衡位势. 由此可得

$$\gamma(E_n')=\sqrt[n]{\gamma(E_1)}=\sqrt[n]{\sin 1/\lambda}-\frac{\log\lambda}{n}+O\left(\left(\frac{\log\lambda}{n}\right)^2\right).\tag{3}$$

现在取一数列$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\lambda_n}{n}=0.$$

如果在式(2)中用 $\lambda_n$ 代替 $\lambda$ 所得的集 $E_n'$ 的长度为 $4/\lambda_n$，那么根据式(3)，$E_n'$ 的容量 $\gamma(E_n')\to 1\ (n\to\infty)$. 于是，若同时要求条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\lambda_n}\leqslant L<2\pi.\tag{*}$$

成立，则集合 $E' := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n'$ 的长度$\leqslant L$. 但由于 $\gamma(E') \geqslant \gamma(E_n') \to 1$ $(n\to\infty)$，故 $\gamma(E')=1$. 这样的数列是存在的，例如，对任意自然数 $m$，取 $\lambda_n = \frac{1}{\pi} n^2 m$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n} \leqslant \frac{1}{m\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \leqslant \frac{2\pi}{3m}.$$

不难验证对任意自然数 $m$ 式(3)成立，由此可见，单位圆周上存在容量为 1 但测度可任意小的的真子集.

## 7. 扫除

设 $D$ 是以 $\Gamma$ 为边界的 $z$-平面的有界域. 用一区域列穷尽之：$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \to D$，其中 $D_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 又设 $g_n(z,z_0)$ $(z_0 \in D_n)$ 是 $D_n$ 的以 $z_0$ 为极的 Green 函数，则

$$g_n(z,z_0) = \log\frac{1}{|z-z_0|} - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} \log\frac{1}{|z_0-a|}\frac{\partial g_n(a,z)}{\partial \nu_n}|\mathrm{d}a|, \quad (1)$$

其中 $\nu_n$ 是点 $a$ 处关于 $\Gamma_n$ 的内法向. 由于 $g_n(z,z_0)=g_n(z_0,z)$，则

$$g_n(z,z_0) = \log\frac{1}{|z-z_0|} - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n} \log\frac{1}{|z-a|}\frac{\partial g_n(a,z_0)}{\partial \nu_n}|\mathrm{d}a|. \quad (2)$$

因此，若置

$$\mathrm{d}\mu_{z_0}^n(a) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial g_n(a,z_0)}{\partial \nu_n}|\mathrm{d}a| \geqslant 0, \quad (3)$$

则 $\int_{\Gamma_n} \mathrm{d}\mu_{z_0}^n(a) = 1$，且对任意 $z \in D_n$

$$g_n(z,z_0) = \log\frac{1}{|z-z_0|} - \int_{\Gamma_n} \log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}^n(a), \quad (4)$$

根据测度理论，$\{\mu_{z_0}^n\}$ 有子列 $\mu_{z_0}^{n(j)}$ 浑收敛于一测度 $\mu_{z_0}$，记为

$$\mu_{z_0}^{n(j)} \dot{\to} \mu_{z_0}\ (j\to\infty),$$

即对于任一关于 $\mu_{z_0}$ 为正则的集 $E$（也就是满足条件 $\mu_{z_0}(\partial E)=0$

之集)，

$$\mu_{z_0}^{n(j)}(E) \to \mu_{z_0}(E) \quad (j \to \infty).$$

于是有

**定理 14**　设 $g(z,z_0)$ 是区域 $D$ 的 Green 函数，则

$$g(z,z_0) = \log\frac{1}{|z-z_0|} - \int_\Gamma \log\frac{1}{|z-a|}\mathrm{d}\mu_{z_0}(a),\ z、z_0 \in D,$$

$$\int_\Gamma \mathrm{d}\mu_{z_0}(a) = 1.$$

称 $\mu_{z_0}$ 为 $z_0$ 处单位质量的扫除.

**注**　一般情形，$\{\mu_{z_0}^n\}$ 的浑收敛子列的选取与 $z_0$ 有关，但下面将证明：在目前的情形下可选取与 $z\in D$ 无关的浑收敛子列.

设 $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $D$ 中全体有理数所成之列. 利用 Cantor 对角线法，对应式(3)可选取子列 $\mu_{z_k}^{n(j)} \dot{\to} \mu_{z_k}\ (j\to\infty)$，使其对每个自然数 $k$ 都成立. 设 $a_0\in\Gamma$. 记

$$U = O(a_0,\rho)\ (\rho > 0)、\Gamma(\rho) = \Gamma \cap U、\Gamma_n(\rho) = \Gamma_n \cap U,$$

$$v_n(z) = \int_{\Gamma_n(\rho)} \mathrm{d}\mu_z^n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n(\rho)} \frac{\partial g_n(a,z)}{\partial \nu_n}|\mathrm{d}a|. \tag{5}$$

那么 $v_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 $D_n$ 内的调和函数且在 $D$ 内的任一紧子集上是一致有界的，从而是一正规族. 又由于 $\lim\limits_{j\to\infty} v_{n(j)}(z_k)$ $(k=1,2,\cdots)$ 存在，故对任意 $z_0\in D$，

$$v(z_0) = \lim_{j\to\infty} v_{n(j)}(z_0) = \lim_{j\to\infty}\int_{\Gamma_{n(j)}(\rho)} \mathrm{d}\mu_{z_0}^{n(j)}(a) = \int_{\Gamma(\rho)} \mathrm{d}\mu_{z_0}(a) \tag{6}$$

存在且其收敛在 $D$ 上是广义一致的，从而 $v(z_0)$ 是 $z_0\in D$ 的调和函数. 因此对任意 $z_0\in D$，$\mu_{z_0}^{n(j)} \dot{\to} \mu_{z_0}\ (j\to\infty)$. 如果对任意 $\rho>0$，$\int_{\Gamma(\rho)} \mathrm{d}\mu_{z_0}(a)$ 是 $z_0$ 的调和函数，那么说 $\mathrm{d}\mu_{z_0}$ 是 $z_0$ 的调和函数.

8. **扫除的唯一性**

由于 $g(z,z_0)=g(z_0,z)$，则对任意 $z$、$z_0\in D$

$$g(z,z_0)=\log\frac{1}{|z-z_0|}-\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z_0-a|}\,\mathrm{d}\mu_z(a).\tag{1}$$

设 $\Omega$ 是 $\bar{D}$ 的余集，则对固定 $z\in\Omega$，$\log\dfrac{1}{|z-z_0|}$ 是变量 $z_0\in D$ 的调和函数. 因此

$$\log\frac{1}{|z-z_0|}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\log\frac{1}{|z-a|}\frac{\partial g_n(a,z_0)}{\partial \nu_a}|\mathrm{d}a|.$$

由此可得对任意 $z_0\in D$、$z\in\Omega$

$$\log\frac{1}{|z-z_0|}=\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}(a).\tag{2}$$

于是，如果对式(1)补充定义：$g(z,z_0)=0$，当 $z_0\in D$ 且 $z\in\Omega$ 时，那么 $g(z,z_0)$ 可被表示如下式

$$\left.\begin{aligned}g(z,z_0)=\log\frac{1}{|z-z_0|}-\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}(a),\\ z_0\in D;\ z\in D\text{ 或 }z\in\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

**定理 15**　$\mu_{z_0}$ 是唯一的.

**证**　假设有两个 $\mu_{z_0}'$、$\mu_{z_0}''$ 使得当 $z\in D$ 或 $z\in\Omega$ 时

$$\begin{aligned}g(z,z_0)&=\log\frac{1}{|z-z_0|}-\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}'(a)\\&=\log\frac{1}{|z-z_0|}-\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}''(a).\end{aligned}$$

置 $\mu_{z_0}=\mu_{z_0}'-\mu_{z_0}''$，则对任意 $z\in D$ 或 $z\in\Omega$

$$\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|z-a|}\,\mathrm{d}\mu_{z_0}(a)=0,\quad z_0\in D.\tag{4}$$

由于 $g(z,z_0)=0$ 在 $\Gamma$ 上除一零容集外成立，则(4)在 $z$-平面上几乎处处成立. 所以根据 §2 定理 3，$\mu_{z_0}\equiv 0$，即 $\mu_{z_0}'=\mu_{z_0}''$. ▌

# 第五章

# 曲面上的函数族

## §1　Riemann 曲面上的函数论零集

### 1.　函数类及其相关的记号

考虑镶边 Riemann 曲面 $R\cup\alpha$，其中 $\alpha$ 为边界. 记

$\boldsymbol{C}(R\cup\alpha):=\{f|f$ 是 $R\cup\alpha$ 上单值连续函数$\}$；

$\boldsymbol{M}(R\cup\alpha):=\{f|f$ 在 $R$ 内为单值半纯且连续到边界 $\alpha\}$；

$\boldsymbol{HP}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为正调和$\}$；

$\boldsymbol{HB}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为有界调和$\}$；

$\boldsymbol{HD}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为调和且 Dirichlet 积分有限$\}$；

$\boldsymbol{HBD}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为有界调和且 Dirichlet 积分有限$\}$；

$\boldsymbol{AB}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为有界解析$\}$；

$\boldsymbol{AD}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为解析且 Dirichlet 积分有限$\}$；

$\boldsymbol{ABD}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为有界解析且 Dirichlet 积分有限$\}$；

$\mathbf{SB}(R\cup\alpha):=\{f|f\in\boldsymbol{C}(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为单叶有界解析$\}$；

$SD(R\cup\alpha):=\{f\mid f\in C(R\cup\alpha)$，$f$ 在 $R$ 内为单叶解析且 Dirichlet 积分有限$\}$；

$MD^*(R\cup\alpha):=\{f\mid f$ 在 $R$ 内为单值半纯、球面面积有限且连续到边界 $\alpha\}$，

其中 $f$ 的球面面积为

$$D^*[f]:=\iint_R \frac{|f'|^2}{(1+|f|^2)^2}\,dxdy.$$

此处统一说明：今后凡考虑非紧镶边 Riemann 曲面 $R\cup\alpha$ 都包括边界 $\alpha$ 为退化(即 $\alpha=\varnothing$ )的情形，此时将其看作通常的开 Riemann 曲面并仍用记号 $R$. 另外，采用术语"$X$-函数"以表示上述各类函数的统一称谓. 而且，如果开 Riemann 曲面 $R$ 不存在非常数 $X$-函数，那么记之为 $\underline{R\in O_X}$. 这是 Riemann 曲面分类记号.

下文还采用 Riemann 曲面相对子区域的分类记号. 设 $\Omega$ 是 $R$ 的一个好子域，$\Gamma$ 是其相对边界. 若在 $\Omega\cup\Gamma$ 上不存在非常数的实部在 $\Gamma$ 上取值为 0 的 $X$-函数，那么记之为 $\underline{\Omega\in SO_X}$.

## 2. 与连续统、全不连通集相关的两个引理

设 $\gamma$ 是复平面上的一个无处稠密点集. 对于 $\gamma$ 中之点 $z$，若存在一正数 $\varepsilon_0$，使对任意正数 $\varepsilon<\varepsilon_0$，$O(z,\varepsilon)\backslash\gamma$ 是非连通的，则称 $z$ 为 $\gamma$ 的 $\underline{C\text{-类点}}$.

**引理 1**　设 $\gamma$ 是复平面上的一个无处稠密连续统. 那么 $\gamma$ 的 $C$-类点全体在 $\gamma$ 中是处处稠密的.

**证**　否则，设存在一点 $z_0\in\gamma$ 和数 $\delta>0$ 使得 $\gamma_\delta:=O(z_0,\delta)\cap\gamma$ 上的点都为非 $C$-类点. 不妨设 $\gamma\backslash\gamma_\delta\neq\varnothing$. 对任意正数 $\delta'\in(0,\delta)$，显然圆周$\{z\mid |z-z_0|=\delta'\}$必与 $\gamma$ 相交，否则 $\gamma$ 非连通. 由于 $\gamma$ 是无处稠密的，故有 $\delta_0\in(0,\delta/2)$使得圆周 $\sigma:=\{z\mid |z-z_0|=\delta_0\}$上必有非 $\gamma$ 的点. 显然 $\sigma\backslash\gamma$ 是非空开集，故可任取一开弧 $\sigma_0\subset\sigma\backslash\gamma$.

记 $\sigma_0$ 的直径为 $d$，并记 $d_0=\frac{1}{4}\min(d,\delta_0)$.

于是，对任意 $z'\in\sigma\cap\gamma\subset\gamma_0$，由于 $z'$ 为非 $C$-类点，故存在正数 $\varepsilon:=\varepsilon(z')\in(0,d_0)$ 使 $O(z',\varepsilon)\setminus\gamma$ 是非空连通开集. 注意到这些圆盘 $O(z',\varepsilon)$ 组成 $\sigma\cap\gamma$ 的一个开覆盖族，由 $\sigma\cap\gamma$ 的紧致性可知必有有限个圆盘 $\{O(z_i,\varepsilon_i)\}_{i=1}^{m}$ 覆盖 $\sigma\cap\gamma$. 记 $G=\bigcup_{i=1}^{m}O(z_i,\varepsilon_i)$，其中每个 $O(z_i,\varepsilon_i)\setminus\gamma$ 是非空连通开集. 设 $G$ 由 $n$ 个分支 $G_1,\cdots,G_n$ 组成 $(n\leqslant m)$. 由 $\varepsilon$、$d_0$ 的取法可知每个 $G_j$ 都不覆盖弧 $\sigma_0$ 的正中半段子弧段 $\sigma_0^*$. 为方便，不妨设 $\sigma_0^*$ 的中点为 $z_0+\delta_0$. 这样一来，若将弧段 $\sigma\cap G_j$ 的两个端点记为 $z_{j1}:=z_0+\delta_0e^{i\alpha_j}$ 和 $z_{j2}:=z_0+\delta_0e^{i\beta_j}$，则必有 $0<\alpha_j<\beta_j<2\pi$，且 $z_{j1}$、$z_{j2}\overline{\in}\gamma$. 置 $G_j^*=(G_j\setminus\gamma)\cup\{z_{j1},z_{j2}\}$. 显然 $G_j\setminus\gamma\subset G_j^*\subset\overline{(G_j\setminus\gamma)}$，故由 $G_j\setminus\gamma$ 连通可知 $G_j^*$ 仍然是非空连通，而且是弧连通的. 于是可以在 $G_j^*$ 内作一条连接 $z_{j1}$ 和 $z_{j2}$ 的弧段，记为 $\sigma_j'$. 现在将 $\sigma$ 中的弧$\overline{\sigma\cap G_j}$用弧 $\sigma_j'$ 替代，将所得的曲线记为 $\sigma'$. 显然 $\sigma'\subset\{z\mid\delta_0/2<|z-z_0|<3\delta_0/2\}$，故 $\sigma'$ 是环绕点 $z_0$ 的闭曲线. 由作法可知 $\sigma'\cap\gamma=\varnothing$，这与 $\gamma$ 是连通的相矛盾. ∎

设 $R$ 是复 $z$-球面 $K$ 的覆盖面. 对 $K$ 上的区域 $G$，$R$ 的覆盖在 $G$ 上的任一非空连通子集都称为 $R$ 的覆盖在 $G$ 上的<u>半岛</u>；投影在 $G$ 上非稠密的半岛称为<u>缺口半岛</u>；(相对)紧致的半岛称为<u>岛</u>.

**引理 2**　设 Riemann 曲面 $R$ 是复 $z$-球面 $K$ 的覆盖面，而 $E$ 是 $R$ 上的全不连通紧致集. 将 $E$ 在 $K$ 球上的投影记为 $e$. 对任一点 $z\in e$，将 $E$ 覆盖在 $z$ 上的所有点记为 $\{p_i\}_{i=1}^{k}$. 于是存在 $z$ 的一个单连通开邻域 $U(z)$，使其边界 $\sigma$ 为解析 Jordan 曲线且满足：

(i) $\sigma\cap e=\varnothing$；

(ii) $R$ 的覆盖在 $U(z)$上的包含点 $p_i$ 的半岛 $\Delta_i$ 必是相对边界紧致的单连岛，且其相对边界不与 $E$ 相交；

(iii) 如果(ii)中的 $p_i$ 不是 $R$ 的支点，那么 $\Delta_i$ 是 $R$ 的单叶岛，

即 $U(z)$ 的每一点正好都被 $\Delta$ 覆盖一次.

**证**　由于 $E$ 是紧致集，则必位于 $R$ 的有限叶中，从而 $e$ 也是全不连通紧致的. 由第四章 § 4 引理 1 即得结论. ▌

### 3. 可去集

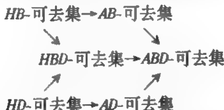
现采用记号 $X:=X(R)$ 表示下列函数类之一：

$HB(R)$、$HD(R)$、$HBD(R)$、$AB(R)$、$AD(R)$ 和 $ABD(R)$.

**定义 1**　设 $K$ 是复 $z$-球面 $\{z\,|\,|z|\leqslant\infty\}$，而 $E$ 是 $K$ 的真紧致子集. 若对于任一包含 $E$ 的开集 $G$，$G\backslash E$ 上的任一 $X$-函数总可以延拓成 $G$ 上的同类函数，则称 $E$ 为<u>$X$-可去集</u>或<u>$X$-零集</u>. 为方便，将各类可去集统称为<u>可去集</u>；而将非 $X$-可去集称为<u>$X$-不可去集</u>.

特别指出，$AB$-可去集即为<u>Painlevé 零集</u>.

显然下面的可去集都是共形不变的且有关系如下：




设 $E$ 是 $R$ 上的 $X$-不可去集. 对于点 $p\in E$，若对 $p$ 的任意邻域 $U$，$E\cap\bar{U}$ 是 $R$ 上的 $X$-不可去集，则称 $p$ 是 $E$ 的<u>$X$-不可去点</u>.

**引理 3**　(i) 可去集不包含任何(非退化的)连续统.

(ii) 可去集的任何紧致子集都是可去集.

(iii) 有限个闭可去集的并集仍为可去集.

(iv) 不可去闭集 $E$ 的全体不可去点所成之集 $B$ 必为完全的，从而必含不可数个点.

**证**　(i) 假设可去集 $E$ 包含连续统 $\gamma$. 根据 Riemann 映照定理(第三章 § 4 定理 7)，存在解析函数 $w=f(z)$，它将 $K\backslash\gamma$ 共形映

上单位圆盘$\{w \mid |w|<1\}$. 于是$f(z)$是$K\backslash\gamma$上的非常数 ABD-函数. 若$E$是$X$-可去集，则必为 ABD-可去集，故$f$可延拓成复球面$K$上的 ABD-函数. 根据调和函数的极值原理，$f$的实部在$K$上恒为常数，从而$f$在$K$上也恒为常数. 矛盾.

(ii) 设$E_0$是$X$-可去集$E$的紧致子集、而$G_0$是包含$E_0$的一个开集. 又设$f(z)$是定义在$G_0\backslash E_0$上的$X$-函数. 将$E_0$与$K\backslash G_0$的距离记为$d$. 对于任意$z\in E_0$，根据第四章§4 引理 1 及其附注，可以在$O(z,d/2)$内取内外两条环绕点$z$的解析 Jordan 曲线$\sigma_1(z)$和$\sigma_2(z)$，使其与$E$三者互不相交，且$\sigma_1(z)$和$\sigma_2(z)$所界的环域内都不含$E$的任何点. 现将$\sigma_1(z)$、$\sigma_2(z)$所围含点$z$的单连通开区域分别记为$V_1(z)$、$V_2(z)$，不妨设$V_1(z)\subset V_2(z)$. 由于$E_0$是紧致的，故有有限个$V_1(z_1)$、$V_1(z_2)$、…、$V_1(z_n)$覆盖之. 如果记$U_1=\bigcup_{k=1}^{n}V_1(z_k)$、$U_2=\bigcup_{k=1}^{n}V_2(z_k)$，那么$U_1\subset\overline{U}_1\subset U_2\subset\overline{U}_2\subset G_0$，且$\overline{U}_2\backslash U_1$不含$E$的任何点. 任取一个包含$E\cup G_0$的开集$G$. 显然函数

$$g(z):=\begin{cases}f(z), & \forall\, z\in U_1\backslash E\\ 0, & \forall\, z\in G\backslash(E\cup\overline{U}_2)\end{cases}$$

是$[U_1\cup(G\backslash\overline{U}_2)]\backslash E$上的$X$-函数. 从而可延拓成$U_1\cup(G\backslash\overline{U}_2)$上的$X$-函数. 于是$f(z)$可延拓成$U_1$上的$X$-函数.

(iii) 只需证两个闭可去集的情形. 设$E_0$、$E_1$是两个闭可去集. 记$E=E_0\cap E_1$，则$E$是闭的. 不妨设$E$为非空的. 又设$G$是包含$E_0\cup E_1$的一个开集，而$f(z)$是定义在$G\backslash(E_0\cup E_1)$上的$X$-函数. 对于任意$z\in E_0\backslash E$，将$z$与$E_2$的距离记为$d$. 与上面相同，取区域$V_1(z)$. 则$E_0\cap V_1(z)$是$E_0$的紧致子集，根据(ii)，$E_0\cap V_1(z)$是$X$-可去的. 于是$f(z)$可延拓成$V_1(z)$上的$X$-函数. 由任意$z$的任意性可得$f(z)$可延拓成$G\cup(E_0\backslash E)$上的，即$G\backslash E_1$上的$X$-函数. 最后由$E_1$的可去性得知$f(z)$可延拓成$G$上的$X$-函数.

(iv) 易证$B$是闭已密集，从而是完备的，且$B$中单点$z$所成之集$\{z\}$在$B$中是疏朗的. 根据 Baire 范畴定理，$B$是第二范畴的.

如果假设 $B$ 是可数集，那么 $B$ 可表为可数个单点集之并．这与已知 $B$ 是第二范畴的相矛盾，从而是不可数集．▌

**推论**　可数点集必为可去集．

**定理 1**　设 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是平面 $P$ 上的一列 $X$-可去集．若它们的并 $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 是紧致集．则 $E$ 仍是 $X$-可去集．

**证**　假设 $E$ 是 $X$-不可去集．则存在 $E$ 的一个开邻域 $U$ 使得存在非常数 $X$-函数 $f \in X(U \setminus E)$ 不能延拓成 $U$ 上的 $X$-函数．

下面将导出矛盾．

注意到 $U$ 必含有同样性质的分支，将其仍记为 $U$．现将 $U$ 中 $X$-不可去点 $z$ 全体记为 $e$，则 $e \neq \varnothing$．根据引理 3，$e$ 是完全集．

置 $e_n = e \cap E_n$．则 $e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$．借助于 $U$ 的度量，$e$ 是一个完备度量空间．根据 Baire 范畴定理，$e$ 是第二范畴的．于是至少存在一个非空的 $e_{n_0}$ 和一点 $z_0 \in e_{n_0}$，使得有一以 $z_0$ 为心的(空间 $e$ 中的) $\varepsilon$-球 $v(z_0, \varepsilon)$ 包含在 $e_{n_0}$ 中，其中 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得 $O(z_0, \varepsilon) \subset U$，故有 $v(z_0, \varepsilon) = e \cap O(z_0, \varepsilon) \subset e_{n_0}$．于是

$$e \cap \overline{O(z_0, \varepsilon/2)} = e_{n_0} \cap \overline{O(z_0, \varepsilon/2)}.$$

上式的左边说明该集是 $e$ 的闭紧子集；而右边说明该集是 $e_{n_0}$ 的子集，根据引理 3，必为 $X$-可去，从而是全不连通的．于是根据第四章 § 4 引理 1，在 $O(z_0, \varepsilon/3)$ 内存在一条环绕 $z_0$ 的解析 Jordan 曲线 $\sigma$ 使得 $\sigma \subset O(z_0, \varepsilon/3) \setminus e_{n_0}$．将 $\sigma$ 所围成的包含 $z_0$ 的邻域记为 $U_\sigma$，则 $U_\sigma \cap e_{n_0} = U_\sigma \cap e$ 是 $e_{n_0}$ 的，从而是 $E_{n_0}$ 的闭紧子集，根据引理 3，必为 $X$-可去的．于是 $f$ 可延拓成 $U_\sigma$ 上的 $X$-函数．这与集 $e$ 的定义相矛盾．▌

**注**　由定理 1 论证中有关 Baire 范畴定理的论述可看出：可列个全不连通紧致集之并若是紧致的则必仍为全不连通的．

根据引理 3，可去集的概念可以推广到 Riemann 曲面上．

**定义 2**　设 $E$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的一个全不连通闭集，若对于任一包含 $E$ 的开集 $G$，$G\setminus E$ 上的任一 $X$-函数总可以延拓成 $G$ 内的同类函数，则称 $E$ 为<u>$X$-可去集</u>或<u>$X$-零集</u>.

**引理 4**　全不连通闭集 $E$ 为 Riemann 曲面 $R$ 上的 $X$-可去集当且仅当对任一点 $p\in E$，存在 $p$ 的一好邻域 $U(p)$ 使得 $U(p)\cap E$ 是 $X$-可去集.

**定理 2**　设 Riemann 曲面 $R$ 是复 $z$-球面 $K$ 的覆盖面. 又设 $E$ 是 $R$ 上的全不连通紧致集. 则 $E$ 是 $X$-可去集的充分必要条件是 $E$ 在球 $K$ 上的投影 $e$ 是 $X$-可去集.

**证**　对任一点 $z\in e$，将 $E$ 盖在 $z$ 上的所有的点记为 $p_i$，$i=1,\cdots,k$. 根据引理 2，存在 $z$ 的一足够小的单连通开邻域 $U(z)$ 满足引理 2 的条件(i)－(iii). 设 $\Delta_i$ 为包含 $p_i$ 盖在 $U(z)$ 上的岛，并设为 $m_i(1\leqslant m_i\leqslant n)$ 叶. 置 $E_i=\Delta_i\cap E$，并记 $e_i$ 为 $E_i$ 在球 $K$ 上的投影. 显然 $e_i$ 为全不连通紧致集. 若 $p_i$ 不是 $R$ 的支点，根据引理 2，若 $\Delta_i$ 是单叶的，则 $e_i$ 和 $E_i$ 的 $X$-可去性是等价的.

由于除 $p_i$ 外 $\Delta_i$ 没有 $R$ 的支点，故对任一点 $z_0\in e_i\setminus\{z\}$，存在满足引理 2 的条件(i)－(iii)的单连通开邻域 $U(z_0)$ 使得 $\Delta_i$ 盖在其上的部分正好为 $m_i$ 个单叶岛. 根据引理 4、根据可去性的局部性质并应用上面的结论可推得 $e_i\setminus\{p_i\}$ 是 $X$-可去的. 又由于单点是零容的，故根据第四章 § 4 定理 2，$\{p_i\}$ 是 $HB$-可去的. 从而 $e_i$ 是 $X$-可去的. ▌

## 4.　共变量 $M_F$

设 $\Omega$ 是复 $z$-球面 $K$ 的一开区域. 用 $F$ 表示定义在 $K$ 的某一开集上的某类单值解析函数 $f$ 全体所成之族，其中不同的 $f$ 定义域可以是不同的. 如果定义域是共同的，比如为 $\Omega$，那么采用记号 $F(\Omega)$ 表示之. 设 $F(\Omega)$ 非空，对于点 $z_0\in\Omega$，定义

$$M_F(z_0,\Omega)=\sup_{f\in F(\Omega)}|f'(z_0)|. \tag{1}$$

为方便，常采用简记号 $M_F$、$M_F(z_0)$ 或 $M_F(\Omega)$. 显然 $F$ 在下述意义下是单调的：若 $\Omega'\subset\Omega$，则 $F(\Omega)\subset F(\Omega')$. 根据式(1)，

$$M_F(z_0,\Omega)\leqslant M_F(z_0,\Omega'). \tag{2}$$

设 $z'=h(z)$ 是使得 $z_0'=h(z_0)$ 的、将 $\Omega$ 一对一共形映上区域 $\Omega'$ 的映照. 如果所有这样的映照都满足条件：$f(z')\in F(\Omega')$ 蕴含 $f\circ h(z)\in F(\Omega)$，则称 $F$ 是共形不变的. 对于共形不变类，有

$$M_F(z_0,\Omega)=M_F(z_0',\Omega')|h'(z_0)|. \tag{3}$$

上式可更为对称地写成

$$M_F(z_0,\Omega)|dz_0|=M_F(z_0',\Omega')|dz_0'|. \tag{4}$$

为此，微分式 $M_F(z,\Omega)|dz|$ 定义了 $\Omega$ 上的一个共形不变测度，而 $M_F$ 是共变量(参看第三章 § 1.6).

若 $F$ 是单调且为共形不变的，则当映照 $z'=h(z)$ 将 $\Omega$ 共形映上 $\Omega'$ 的一子区域时，由式(2)、(4)可得

$$M_F(z_0',\Omega')|dz_0'|\leqslant M_F(z_0,\Omega)|dz_0|. \tag{5}$$

称此为 $M_F$ 的弱单调性.

### 5. 紧致函数类

如果对任意 $\Omega$ 的穷尽列 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$，对任意 $f_n\in F(\Omega_n)$，函数列 $\{f_n\}$ 必有子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 $\Omega$ 内广义一致收敛于某个函数 $f\in F(\Omega)$，那么称 $F$ 是紧致的函数类. 在此情形下式(1)中的上确界号 sup 可换成最大值号 Max. 为方便，将取最大值的函数称为关于共变量 $M_F$ 的极值函数.

**定理 3** 单调且共形不变的紧致函数类具有下面性质：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}M_F(z_0,\Omega_n)=M_F(z_0,\Omega)$；

(ii) $M_F(z,\Omega)$ 关于变量 $z$ 是连续的；

(iii) $\log M_F(z,\Omega)$ 或为下调和或恒为 $-\infty$.

**证**　(i) 根据 $F$ 的单调性，由式(2)可知 $\lim\limits_{n\to\infty} M_F(z_0,\Omega_n)$ 存在，且 $\geqslant M_F(z_0,\Omega)$. 另一方面，若 $f_n$ 是 $M_F(z_0,\Omega_n)$ 的极值函数，则由紧致性可得相反的不等式

$$M_F(z_0,\Omega) \geqslant \lim_{n\to\infty} |f_n'(z_0)| = \lim_{n\to\infty} M_F(z_0,\Omega_n).$$

(ii) 设 $f$ 关于点 $z_0$ 取到值 $M_F(z_0,\Omega)$. 取点 $z_0' \in \Omega\backslash\{z_0\}$ 使得 $\{z \mid |z-z_0|<2|z_0'-z_0|\}\subset\Omega$. 则 $M_F(z_0',\Omega)\geqslant|f'(z_0')|$，因此

$$\varliminf_{z_0'\to z_0} M_F(z_0',\Omega) \geqslant M_F(z_0,\Omega). \tag{6}$$

将 $\Omega$ 中与其边界之距离 $>|z_0'-z_0|$ 的全体点记为 $\Omega'$. 现将 $\Omega'$ 平移，使得 $z_0$ 移到 $z_0'$. 将 $\Omega'$ 在此平移下的象记为 $\Omega''$. 于是有

$$M_F(z_0',\Omega) \leqslant M_F(z_0',\Omega'') = M_F(z_0,\Omega'). \tag{7}$$

令 $z_0'\to z_0$，由(i)可得

$$\varlimsup_{z_0'\to z_0} M_F(z_0',\Omega) \leqslant M_F(z_0,\Omega).$$

对比式(6)和(7)即得 $M_F(z,\Omega)$ 关于变量 $z$ 是连续的.

(iii) 对于任意 $f\in F(\Omega)$，函数 $\log|f'(z)|$ 为下调和的，故函数 $\log M_F(z,\Omega)=\max\limits_{f\in F(\Omega)}\log|f'(z)|$ 或为下调和或恒为 $-\infty$. ▌

## 6.　几种特殊函数类

最令人感兴趣的是那些满足下面条件的函数类 $F$：$M_F(z,\Omega)$ 在任一单点 $z\in\Omega$ 取值 0 必导致恒为 0. 本文选定的是 $AB$-、$AD$-函数类. 但必须对它们做些必要的限制：

a) $|f(z)|\leqslant 1$，若 $f\in AB(\Omega)$；

b) $D[f]\leqslant\pi$，若 $f\in AD(\Omega)$；

c) 特别强调，常值函数都属于所讨论的每个函数类.

上述限制下的共变量分别为 $M_{AB}$、$M_{AD}$. 对于它们各自的子类 $SB(\Omega)$、$SD(\Omega)$ 对应的共变量分别为 $M_{SB}$ 和 $M_{SD}$. 如果将上面四种函数类经 $f(z_0)=0$ 进行规范化，所得的函数类分别记为 $AB_0(\Omega)$、

$AD_0(\Omega)$、$SB_0(\Omega)$、$SD_0(\Omega)$，那么对应的共变量 $M_F$ 将不受影响. 这一点除 $AB(\Omega)$外是显然的；而对 $AB$ 函数类函数 $f$，注意到函数 $f_0(z):=\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}$属于 $AB_0(\Omega)$，且$|f_0'(z_0)|\geqslant|f'(z_0)|$. 故

$$\sup_{f\in AB_0(\Omega)}|f'(z_0)| = \sup_{f\in AB(\Omega)}|f'(z_0)|.$$

易证上述四种函数类都是单调且共形不变的，故对应的 $M_F$ 有弱单调性，且条件 c)保证子类 $AB_0(\Omega)$、$AD_0(\Omega)$、$SB_0(\Omega)$和 $SD_0(\Omega)$都是紧致的，于是 $M_{AB}$、$M_{AD}$、$M_{SB}$ 和 $M_{SD}$ 都有定理 3 所述的性质.

## 7. $N_F$ 零类集与可去集的等价性

**定义 3** 设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 的一闭真子集，而 $z_0\overline{\in}E$. 又设 $E$ 的余集 $\Omega:=K\backslash E$ 是一连通开区域. 若 $M_F(z_0,\Omega)$恒为 0，则称 $E$ 为<u>$N_F$ 零类集</u>，简称为<u>$N_F$ 集</u>；或简记为 $E\in N_F$.

注意到 $M_F$ 在某一点取值 0 当且仅当恒为 0. 对于单叶函数这一论断是显然的. $N_{AB}$ 常简记为 $N_B$，而 $N_{AD}$ 常简记为 $N_D$.

**定理 4** 集 $E$ 为 $N_B$ 零类集当且仅当集 $E$ 为 $AB$-可去集.

**证** 设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 的一个闭真子集，且 $\infty\overline{\in}E$，它的余集 $\Omega:=K\backslash E$ 是一连通开区域. 又设闭集 $E$ 包含在开区域 $\Omega'$ 内. 若 $E$ 是 $N_B$ 集，而 $f(z)$ 是 $\Omega'\backslash E$ 内的 $AB$-函数，则运用 Cauchy 积分公式可将 $f$ 表示成 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，其中 $f_1(z)$是 $\Omega'$ 内的解析函数，而 $f_2(z)$ 是 $\Omega$ 内的解析函数. 但 $f_2(z)$ 是有界的，故为常数. 从而 $f(z)$是 $\Omega'$ 内的 $AB$-函数. 逆命题显然成立. ▌

类似可得

**定理 5** 集 $E$ 为 $N_D$ 零类集当且仅当集 $E$ 为 $AD$-可去集.

## 8. 极值长度

设 $R$ 是一 Riemann 曲面. 如果 $R$ 上的弧之任意闭子弧都是

可求长的，那么称该弧为局部可求长的. 形如 $c:=\sum k_i c_i$（有限或无限）的和式称为局部可求长弧链，其中 $k_i$ 为整数，而 $c_i$ 为局部可求长弧. 有时也用术语链表示并集 $\bigcup_{i=1} c_i$. 若链 $c$ 含有限项且每个 $c_i$ 都是闭弧，则称链 $c$ 是可求长链.

设 $\Omega$ 是 $R$ 上的任一开集. 将定义在 $\Omega$ 上的非负共变量 $\rho$ 称为 $\Omega$ 上的密度(函数). 另外还要求 $\rho$ 是下半连续的. 显然 $\rho|dz|$ 是共形不变的，称之为 $\Omega$ 上的测度. 定义

$$\int_c \rho|dz| = \sum |k_i| \int_{c_i} \rho|dz| (\leqslant \infty).$$

设 $\Gamma$ 是 $\Omega$ 内的一局部可求长弧链族. 置

$$L(\Gamma,\rho) = \inf_{c\in\Gamma} \int_c \rho\ |dz|, \qquad A(\rho,\Omega) = \iint_\Omega \rho^2 dxdy, \qquad (1)$$

其中约定 $\frac{0}{0}=\frac{\infty}{\infty}=0$. 由 $\rho$ 的下半连续性立即可得 $A(\rho,\Omega)>0$，除非 $\rho\equiv 0$. 考虑量

$$\lambda(\Gamma) = \sup_\rho \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho,\Omega)}, \qquad (2)$$

其中上确界是取自 $\Omega$ 上的所有不恒为 0 的非负下半连续密度. 量 $\lambda(\Gamma)$ 只与 $\Gamma$ 相关，而不依赖于包含 $\Gamma$ 中全体链的开集 $\Omega$ 的选取. 事实上，对于 $\Omega$ 上的任一测度 $\rho|dz|$，只要在 $R\backslash\Omega$ 上补充定义 $\rho=0$，那么 $\rho|dz|$ 即为 $R$ 上的测度. 若记 $A(\rho)=A(\rho,R)$，则有 $A(\rho,\Omega)\leqslant A(\rho)$. 于是对于 $R$ 上的所有测度，有

$$\lambda(\Gamma) = \sup \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)},$$

将 $\lambda(\Gamma)$ 称为链族 $\Gamma$ 的极值长度.

下面证明极值长度是共形不变的. 设 $f(p)$ 是将 Riemann 曲面 $R$ 映上曲面 $R_1$ 的直接或非直接共形映照. 假定 $\Gamma$ 是开集 $\Omega\subset R$ 内的局部可求长弧链族. 记 $f(\Gamma)=\{f(\gamma)\,|\,\gamma\in\Gamma\}$. 用 $\Omega_1$ 表示 $\Omega$ 在映照 $f$ 下的象. 则 $f(\Gamma)$ 是 $\Omega_1$ 内的局部可求长弧链族.

现在设 $f'$ 是 $f$ 的导函数或共轭导函数，而 $\rho_1|dz_1|$ 是映照 $f$ 下与 $\Omega$ 上的测度 $\rho|dz|$ 相对应的 $\Omega_1$ 上的测度，那么必有

$$\rho(z) = \rho_1(f(z))|f'(z)|, \quad 且 \quad A(\rho,\Omega) = A(\rho_1,\Omega_1).$$

因此 $\lambda(\Gamma)\geqslant\lambda(f(\Gamma))$. 对 $f^{-1}$ 进行讨论即得相反不等式. 故有

$$\lambda(\Gamma) = \lambda(f(\Gamma)). \tag{3}$$

## 9. 弧链族之间极值长度的关系

**定理 6** 设 $\Gamma$、$\Gamma'$、$\Gamma_n$, $n=1,2,\cdots$, 是 Riemann 曲面 $R$ 上的局部可求长弧链族序列.

(i) 若每个 $\gamma\in\Gamma$ 包含某个 $\gamma'\in\Gamma'$，则 $\lambda(\Gamma)\geqslant\lambda(\Gamma')$.

(ii) 若 $\Gamma\subset\bigcup_n\Gamma_n$，则 $\quad \dfrac{1}{\lambda(\Gamma)}\leqslant\sum_n\dfrac{1}{\lambda(\Gamma_n)}$.

(iii) 又设存在一互不相交的开集列 $\{\Omega_n\}$ 使得每个 $\Omega_n$ 都包含 $\Gamma_n$ 中之弧链. 若 $\Gamma\supset\bigcup_n\Gamma_n$，则

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)}\geqslant\sum_n\frac{1}{\lambda(\Gamma_n)}.$$

(iv) 在(iii)的设定下，若对每个 $\gamma\in\Gamma$ 存在一列 $\gamma_n\in\Gamma_n$ 使得 $\bigcup_n\gamma_n\subset\gamma$，则

$$\lambda(\Gamma)\geqslant\sum_n\lambda(\Gamma_n).$$

(v)若 $\Gamma_1\subset\Gamma_2\subset\cdots$ 且 $\Gamma=\bigcup_n\Gamma_n$，则 $\lambda(\Gamma)=\lim_{n\to\infty}\lambda(\Gamma_n)$.

**证** (i) 由于每个密度 $\rho$ 都使得 $L(\Gamma',\rho)\leqslant L(\Gamma,\rho)$，故成立.

(ii) 不妨设每个 $\lambda(\Gamma_n)>0$. 于是对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R$ 上的密度 $\rho_n$ 使得 $L(\Gamma_n,\rho_n)>0$ 而且 $\lambda(\Gamma_n)^{-1}\geqslant A(\rho_n)L(\Gamma_n,\rho_n)^{-2}-\varepsilon 2^{-n}$. 置

$$\rho_n'(z) = L(\Gamma_n,\rho_n)^{-1}\rho_n(z)、\ \rho(z) = \sup_n\rho_n'(z).$$

则 $L(\Gamma,\rho)\geqslant 1$ 且 $\rho^2\leqslant\sum_n\rho_n'^2$. 于是对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lambda(\Gamma)^{-1} \leqslant A(\rho)L(\Gamma,\rho)^{-2} \leqslant \sum_n A(\rho_n)L(\Gamma_n,\rho_n)^{-2} \leqslant \lambda(\Gamma_n)^{-1} + \varepsilon.$$

(iii) 不妨设 $\lambda(\Gamma)>0$. 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $R$ 上的密度 $\rho$ 使得 $L(\Gamma,\rho)>0$ 而 $\lambda(\Gamma)^{-1}+\varepsilon \geqslant A(\rho)L(\Gamma,\rho)^{-2}$. 由于

$$L(\Gamma,\rho) \leqslant L(\Gamma_n,\rho) \quad 和 \quad A(\rho) \geqslant \sum_n A(\rho,\Omega_n),$$

故对任意 $\varepsilon>0$,

$$\lambda(\Gamma)^{-1} + \varepsilon > \sum_n A(\rho,\Omega_n)L(\Gamma_n,\rho)^{-2} \geqslant \lambda(\Gamma_n)^{-1}.$$

(iv) 若存在某个自然数 $n$ 使得 $\lambda(\Gamma_n)=\infty$, 则由式(i)即得结论. 因此可设对任意 $n$ 都有 $\lambda(\Gamma_n)<\infty$. 于是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\Omega_n$ 上的密度 $\rho_n$ 使得 $L(\Gamma_n,\rho_n)\geqslant 1$ 而且 $A(\rho_n,\Omega_n)^{-1}>(1-\varepsilon)\lambda(\Gamma_n)$. 对任意自然数 $m$, 在 $R$ 上定义密度

$$\rho(z) = \begin{cases} \lambda(\Gamma_n)\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda(\Gamma_k)\right)^{-1}\rho_n(z), & z \in \Omega_n; \\ 0, & z \in R\setminus \bigcup_{k=1}^{m} \Omega_k. \end{cases}$$

于是有 $L(\Gamma,\rho)\geqslant 1$, 且对任意 $\varepsilon>0$ 和自然数 $m$,

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &\geqslant \frac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda(\Gamma_k)\right)^2\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda(\Gamma_n)^2 A(\rho_n,\Omega_n)\right)^{-1} \\ &\geqslant \left(\sum_{k=1}^{m}\lambda(\Gamma_k)\right)^2(1-\varepsilon)\left(\sum_{n=1}^{m}\lambda(\Gamma_n)\right)^{-1} \\ &= (1-\varepsilon)\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda(\Gamma_k)\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**注** (v) 由 Suita, N [1]、Ziemer, W [1]给出, 现略去证明.

## 10. 矩形、圆环内链族的的极值长度

**引理 5** 设平面矩形边长为 $a$ 和 $b$, 则该矩形内连接长为 $a$ 的两对边的弧线族 $\Gamma$ 之极值长度为 $b/a$.

**证**　设矩形为 $T=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b\}(a,b>0)$. 对于含 $T$ 的区域 $\Omega$, 定义密度 $\rho$ 如下: 在 $T$ 上取 $\rho=1$, 而在 $\Omega\backslash T$ 处 $\rho=0$. 则 $L(\Gamma,\rho)=b$, $A(\Gamma,\rho)=ab$ . 于是 $\lambda(\Gamma)\geqslant b^2/(ab)=b/a$ .

对任意密度 $\rho$, 规范化为 $L(\Gamma,\rho)=1$, 且 $\rho|_{\Omega\backslash T}=0$. 显然, 对任意 $x$ 有 $\int_0^b\rho(x,y)\,\mathrm{d}y\geqslant 1$, 从而 $\iint_\Omega\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\geqslant a$ . 两边平方再用 Schwartz 不等式可得

$$A(\Gamma,\rho)\cdot ab=\iint_\Omega\rho^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\iint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant a^2.$$

故　$L(\Gamma,\rho)^2/A(\Gamma,\rho)=1/A(\Gamma,\rho)\leqslant b/a$,　即得　$\lambda(\Gamma)\leqslant b/a$. ▌

**引理 6**　设 $\Delta$ 是平面圆环, 其内、外半径分别为 $R$、$R'$ , 则 $\Delta$ 内分离两边界圆周的闭曲线族 $\Gamma$ 之极值长度为 $\dfrac{2\pi}{\log(R'/R)}$.

**证**　设 $\rho(z)$是一非负密度. 则

$$L(\Gamma,\rho)\leqslant\int_{|z|=r}\rho(z)|\mathrm{d}z|=\int_0^{2\pi}\rho(re^{i\theta})r\mathrm{d}\theta,\quad R<r<R'. \tag{1}$$

其中 $z=re^{i\theta}$. 于是

$$L(\Gamma,\rho)\log\frac{r_2}{r_1}\leqslant\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\rho(re^{i\theta})\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\quad R\leqslant r_1<r_2\leqslant R'. \tag{2}$$

两边平方再用 Schwartz 不等式可得

$$\left(L(\Gamma,\rho)\log\frac{r_2}{r_1}\right)^2\leqslant\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}[\rho(re^{i\theta})]^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right)$$

$$\leqslant 2\pi\log\frac{r_2}{r_1}A(\rho),\quad R\leqslant r_1<r_2\leqslant R'.$$

故　$\dfrac{L(\Gamma,\rho)^2}{A(\rho)}\leqslant 2\pi/\log\dfrac{r_2}{r_1}$,　$R\leqslant r_1<r_2\leqslant R'$.　由此可得

$$\lambda(\Gamma)\leqslant\frac{2\pi}{\log(R'/R)}. \tag{3}$$

为得相反不等式取密度 $\rho_0$ 如下: 在 $\Delta$ 内 $\rho_0(z)=\dfrac{1}{2\pi r}$, 在 $\Delta$ 外

$\rho_0(z)=0$. 则对任意 $\gamma\in\Gamma$, 由式(1)得

$$1\leqslant\left|\int_\gamma\frac{dz}{2\pi z}\right|\leqslant\int_\gamma\frac{|dz|}{2\pi r}=L(\Gamma,\rho_0)\leqslant\int_0^{2\pi}\rho_0(re^{i\theta})rd\theta=1,$$

其中 $z=re^{i\theta}$, 而 $\int_\gamma\frac{dz}{2\pi z}$ 是 $\gamma$ 关于原点的指数 $n(\gamma,0)$(第二章 § 1).
因此 $L(\Gamma,\rho_0)=1$. 另外

$$A(\rho_0)=\int_0^{2\pi}\int_R^{R'}[\rho_0(re^{i\theta})]^2r\,drd\theta=\frac{1}{2\pi}\log\frac{R'}{R}.$$

故　$\lambda(\Gamma)\geqslant\frac{L(\Gamma,\rho_0)^2}{A(\rho_0)}=\frac{2\pi}{\log(R'/R)}$.　　对比式(3)得

$$\lambda(\Gamma)=\frac{2\pi}{\log(R'/R)}.\ \blacksquare$$

类似可得:

**引理 7**　设 $\Delta$ 是平面圆环, 其内、外半径分别为 $R$、$R'$, 则 $\Delta$ 内连接两边界圆周的曲线族 $\Gamma$ 之极值长度为 $\frac{1}{2\pi}\log\frac{R'}{R}$.

## 11.　周界长与不变量 $M_{SB}$、$M_{SD}$

设 $\Omega$ 是一复球面的真子区域, $z_0\in\Omega$. 将 $\Omega$ 的余集记为 $E$, 设 $E_0$ 是 $E$ 的一子集. 将 $\Omega$ 内与 $z_0$ 之距离$>r(>0)$且分离 $z_0$ 和 $E_0$ 的简单闭曲线全体记为$\{\gamma\}_r$. 显然 $\lambda\{\gamma\}_r$随着 $r$ 趋于 0 而趋于 0. 但当 $r'<r$ 时, 由定理 1 和引理 2 可得

$$\frac{1}{\lambda\{\gamma\}_{r'}}\geqslant\frac{1}{\lambda\{\gamma\}_r}+\frac{1}{2\pi}\log\frac{r}{r'}.$$

即　$\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_r}+\log r\leqslant\frac{2\pi}{\lambda\{\gamma\}_{r'}}+\log r'$.　　于是极限

$$\mu(z_0,E_0):=\lim_{r\to0}\frac{1}{r}e^{-2\pi/\lambda\{\gamma\}_r}$$

存在, 且在关于 $E_0$ 的适当的变换下 $\mu(z_0,E_0)|dz_0|$是共形不变的.

由定理 1 可知 $\mu(z_0,E_0)$是关于 $E_0$ 的非减函数, 也是关于 $\Omega$

的非减函数. 将 $\mu(z_0, E_0)$ 称为 $E_0$ 的关于区域 $\Omega$ 和中心 $z_0$ 的周界长. 对圆盘 $O(z_0, R)$, 其余集的所有子集的周界长都是 $\frac{1}{R}$.

值 $\mu(z_0, E_0)$ 仅依赖于 $E$ 的与 $E_0$ 相交的分支所成之集, 而不依赖于 $E$ 的分支中的个别点. 因此, 单点的周界长等于它所在分支的周界长. 点 $p$ 的周界长记为 $\mu(z_0, p)$. 对单连通区域, $\mu(z_0, p)$ 只取一个值; 而当 $z_0 = \infty$ 时, $\mu(z_0, p) = \gamma(E)$, 即集 $E$ 的容量.

**定理 7**　$M_{SB} = M_{SD} = \max\limits_{p \in E} \mu(z_0, p)$.

定理的证明参看 Ahlfors L. & Beurling A. [1].

## 12. 线性集的可去性

**引理 8**　设 $E$ 是复球面 $K$ 的直线 $L$ 上的一紧致子集. 若 $E$ 是(Lebesgue)正测度集, 则 $K \backslash E$ 上存在非常数 $AB$-函数. 从而 $E$ 不是 $AB$-可去集.

**证**　不妨设 $E$ 位于实轴上. 记 $L = \text{mes}(E)$ 并置

$$f(z) := \int_E \frac{dx}{z - x} = \frac{L}{z} + \cdots.$$

显然 $|\text{Im} f(z)| < \pi$, 故函数

$$\frac{e^{f(z)/2} - 1}{e^{f(z)/2} + 1} \tag{1}$$

是 $K \backslash E$ 上的非常数 $AB$-函数. 于是 $E$ 非 $AB$-可去. ▌

**注**　由于式(1)展开式的第一项的系数为 $\frac{L}{4}$, 故 $M_B \geq \frac{L}{4}$.

**引理 9**　设 $D$ 是复 $z$-球面 $K$ 上的一紧致子集, 且 $\infty \overline{\in} D$. 用 $\Gamma$ 表示 $K \backslash D \cup \{\infty\}$ 内的分离 $D$ 与 $\infty$ 的闭曲线系所组成的链族, 并将 $\gamma$ 的长度记为 $\text{mes}_1(\gamma)$. 置

$$\Lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \text{mes}_1(\gamma).$$

于是对于 $K \backslash D$ 上的非常数 $AB$-函数

$$f(z):=\frac{c}{z}+\cdots,\quad c\neq 0,$$

若 $|f(z)|\leqslant 1$，则有 $|c|\leqslant\frac{1}{2\pi}A$.

**证** 由于 $|c|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}|f(z)||\mathrm{d}z|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}|\mathrm{d}z|$. 故

$$A\geqslant 2\pi|c|>0.$$ ▌

**推论** 对于长度为 $L$ 的线性集 $E$，有

$$M_{AB}(\infty,K\backslash E)\leqslant\frac{1}{\pi}L.$$

**证** 显然 $L=A/2$. 根据引理 9，结论成立. ▌

**定理 8** 对于长度为 $L$ 的紧致线性集，

$$M_{SB}\leqslant M_{AD}\leqslant\frac{L}{4}\leqslant M_{AB}\leqslant\frac{L}{\pi}.$$

**证** 不妨设 $E$ 位于实轴上. 考虑形如

$$f(z):=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{z-t}\mathrm{d}t$$

的函数，其中 $\varphi(t)$是平方可积且在 $E$ 外恒取值 0. 根据 Fourier 积分和 Parseval 关系可得

$$D[f]=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(s)-\varphi(t)|^2}{(s-t)^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t:=H(\varphi),$$

其中等式成立不论等号两边是有限或为无限. 因此，如果 $D[f]$有限，那么 $f(z)$可表为某个 $\varphi(t)$的积分形式，且 $H(\varphi)=D[f]$. 由于 $H(\varphi)\geqslant H(|\varphi|)$，故 $AD(\Omega)$的极值函数 $f$ 可表为某个实值 $\varphi(t)$ 的积分，且在 $E$ 上 $\varphi(t)\geqslant 0$. 设 $\varphi^*(t)$ 是偶的、对称递减的、关于 $\varphi(t)$ 和集 $k_n(s):=\min(\pi s^{-2},n)$ 等可测的函数. 记

$$A_n(\varphi)=-B_n(\varphi)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi^2(s)+\varphi^2(t))k_n(s-t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$B_n(\varphi)=2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\varphi(t)k_n(s-t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

于是 $H(\varphi)$ 是 $A_n(\varphi)-B_n(\varphi)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

显然 $A_n(\varphi)=A_n(\varphi^*)$，而根据 Hardy，Littlewood 和 Polya 的重排列定理(参看《不等式》的定理 380，科学出版社，1965，越民义译)，$B_n(\varphi)\leqslant B_n(\varphi^*)$. 因此，$H(\varphi)\geqslant H(\varphi^*)$，故 $D[f]\geqslant D[f^*]$，其中 $f^*$ 是由 $\varphi^*$ 的积分所表示的函数. 若记 $E^*$ 为 $\pm L/2$ 为端点的线段，则 $\varphi^*$ 在 $E^*$ 外恒取值 0. 故 $f^*$ 在 $E^*$ 外是全纯的，因此

$$M_D(E)\leqslant M_D(E^*)=\frac{L}{4}.$$

显然由 $M_{SB}(E)=M_{SD}(E)$ 可得 $M_{SB}(E)\leqslant M_D(E)$；而其余不等关系见引理 8 的附注和引理 9 的推论. ▌

**推论**　$N_B\subset N_D\subset N_{SB}$；从而 $AB$-可去集必为 $AD$-可去集.

**定理 9**　设 $E$ 是直线上的一紧致子集. 则 $E$ 是 $AB$-可去集的充分必要条件是 $E$ 长度为 0.

**证**　根据定理 4，$AB$-可去集即为 $N_B$ 集. 于是由定理 8 立即可得本定理. ▌

**注**　更为一般的有：设 $E$ 是解析曲线上的一紧致子集. 则 $E$ 是 $AB$-可去集的充分必要条件是 $E$ 长度为 0.

## 13.　$AD$-可去集的特征

设 $\Omega$ 是 $R$ 上的任一区域，而 $E_1$、$E_2$ 是 $\Omega$ 内或 $\Omega$ 之边界上的两个不交紧致子集. 又设 $\Sigma$ 是 $\Omega$ 内的连接 $E_1$、$E_2$(即两端分别位于 $E_1$、$E_2$)的局部可求长弧线族. 则 $E_1$、$E_2$ 关于区域 $\Omega$ 的<u>极值距离</u>定义为极值长度 $\lambda(\Sigma)$，记为 $\lambda_\Omega(E_1,E_2)$.

由引理 5 可得：设 $H$ 是边长为 $a$、$b$ 的开矩形，记长为 $a$ 之两对边为 $a_1$、$a_2$，则极值距离 $\lambda_\Omega(a_1,a_2)=b/a$.

**定理 10** 设 $E$ 是矩形 $H$ 内一紧致子集，则 $E$ 是 $AD$-可去集当且仅当 $\lambda_{H\setminus E}(a_1,a_2)=\lambda_H(a_1,a_2)$.

**定理 11** 复平面 $S$ 上的点集 $E$ 是 $AD$-可去集当且仅当所有与其余集 $S\setminus E$ 共形等价的区域之余集都具有零面积.

**定理 12** 解析弧 $\Gamma$ 上的闭子集 $E$ 是 $AD$-可去集当且仅当其余集 $\Gamma\setminus E$ 的(内)容量与 $\Gamma$ 的容量相等.

以上定理的证明参看 Sario L. & Nakai M. [1].

# §2 半纯函数及其产生的覆盖面

## 1. 半纯函数的大范围聚值集

首先统一说明：今后凡考虑非紧镶边 Riemann 曲面 $R\cup\alpha$ 都包括边界 $\alpha$ 为退化（即 $\alpha=\varnothing$ ）的情形，即通常的开 Riemann 曲面 $R$. 将 $R\cup\alpha$ 的理想边界记为 $\beta$.

**定义 1** 设 $w=f(p)$ 是非紧镶边 Riemann 曲面 $R\cup\alpha$ 上的单值半纯函数. 对广义复值 $w$，若 $R$ 上有趋于 $\beta$ 的点列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n)=w,$$

则称 $w$ 为 $f$ 在理想边界 $\beta$ 的聚值. 聚值全体称为 $f$ 的大范围聚值集，简称为聚值集，并记为 $C_R(f,\beta)$，简记为 $C_R(f)$.

显然，单值半纯函数的大范围聚值集是闭集. 另外，当涉及到聚值概念时，$R\cup\alpha$ 都指非紧镶边曲面.

2. **半纯函数的价函数**

设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数. 又设 $F$ 是由 $f$ 产生的覆盖在复 $w$-球面 $K:=\{w\mid |w|\leqslant\infty\}$ 的覆盖面，函数

$$n_f(w) \quad 和 \quad n_f^*(w)$$

都用于表示复球面的点 $w$ 被 $F$ 所覆盖面的次数，即 $f^{-1}(w)\cap R$ 的基数. 但前者的重点的覆盖次数按重数算，而后者只算一次. 分别称之为 $f$ 的价函数和修正价函数. 价函数和修正价函数取值于非负整数和 $+\infty$. 将 $\sup\limits_{w\in K} n_f(w)$ 称为覆盖面 $F$ 的叶数.

显然，对复球面的子区域 $D$，如果 $f^{-1}(D)$ 有一分支 $\Omega$ 使得

$$n^*_{f|_\Omega}(w)\equiv \text{const.}<\infty, \quad w\in f(\Omega),$$

那么就意味着 $f$ 限制在 $\Omega$ 上所产生的覆盖在 $D$ 上的 Riemann 曲面没有任何支点，且覆盖 $D$ 的每一点都同样多次.

价函数 $n_f(w)$ 在下述意义下是下半连续的：

$$\underline{n}_f(w_0):=\lim_{m\to\infty}\Big(\inf_{|w-w_0|<1/m} n_f(w)\Big)=n_f(w_0), \quad \forall\, w_0\in K,$$

其中，若 $w_0=\infty$，则 $|w-w_0|<1/m$ 必须用 $|w|>m$ 代替. 又置

$$\bar{n}_f(w_0)=\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{|w-w_0|<1/m} n_f(w)\Big).$$

一般情况下，$\bar{n}_f\geqslant n_f\geqslant \underline{n}_f$；而 $\bar{n}_f(w_0)=n_f(w_0)<\infty$ 当且仅当 $n_f$ 在 $w_0$ 处有限连续；还有，使 $\bar{n}_f(w_0)>n_f(w_0)$ 的点 $w_0$（必有 $n_f(w_0)<\infty$）是 $n_f$ 的非连续点.

**引理 1** 设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数. 则复 $w$-球 $K$ 上的点 $w_0\overline{\in f(\alpha)}$ 是 $n_f$ 的非连续点当且仅当

$$n_f(w_0)<\infty \quad 且 \quad w_0\in C_R(f).$$

**证** 1) 当 $n:=n_f(w_0)=0$ 时，由于 $\bar{n}_f(w_0)>n=0$，故存在点列 $p_n\in R$ 使得 $f(p_n)\to w_0\,(n\to\infty)$. 假设点列 $\{p_n\}$ 在 $R$ 上有聚点 $p$，则有子列 $\{p_{n_k}\}$ 使得 $f(p_{n_k})\to f(p)\,(k\to\infty)$. 于是 $f(p)=w_0$，矛盾.

由此可见 $p_n\to\beta(n\to\infty)$，从而 $w_0\in C_R(f)$.

反之，若 $n=0$ 且 $w_0\in C_R(f)$，则存在点列 $p_n\in R$ 使得 $p_n\to\beta$ 且 $f(p_n)\to w_0(n\to\infty)$. 从而

$$\bar{n}_f(w_0)=\lim_{m\to\infty}\Big(\sup_{|w_0-w|<1/m} n_f(w)\Big)\geqslant 1>0=n.$$

故 $w_0$ 是 $n_f$ 的非连续点.

2) 当 $0<n:=n_f(w_0)<\infty$ 时，置

$$f^{-1}(w_0)=\{q_1,\cdots,q_m\},\ m\leqslant n, \tag{1}$$

其中 $q_i$ 是 $k_i$ 阶支点. 显然 $k_i<n$ 且 $m+\sum_{i=1}^{m}k_i=n$. 在球 $K$ 上取一个以 $w_0$ 为心的足够小的圆盘 $U$ 使得 $\bar{U}\cap f(\alpha)=\varnothing$ 且 $f^{-1}(U)$ 每个包含 $q_i$ 的分支 $V_i$ 在 $R$ 上都是相对紧的，且满足

a) $\bar{V}_i\cap\bar{V}_j=\varnothing$，当 $i\neq j$ 时；

b) $n_{f|_{V_i}}(w)=k_i+1$，　$\forall\ w\in U\backslash\{w_0\}$.

取 $R'=R\backslash\bigcup_i\bar{V}_i$，$\alpha'=\alpha\cup(\bigcup_i\partial V_i)$. 则 $R'\cup\alpha'$ 仍是一镶边 Riemann 曲面，且 $n_{f|_{R'}}(w_0)=n_f(w_0)-n=0$. 显然 $C_R(f)=C_{R'}(f)$. 于是问题可归结为情形 1). ▌

### 3.　Stoïlow 紧致化

设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽，对每个自然数 $n$，$R\backslash R_n$ 由有限个非紧分支 $\{K_1^{(n)},\cdots,K_{\nu_n}^{(n)}\}$ 组成. 若非紧子区域列 $\{K_{i_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 满足条件 $K_{i_1}^{(1)}\supset K_{i_2}^{(2)}\supset\cdots\supset K_{i_n}^{(n)}$，则称之为<u>判定列</u>. $R$ 的另一穷尽列 $\{\tilde{R}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 给出另一些判定列 $\{\tilde{K}_{i_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. 设有两个判定列 $\{K_{i_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\tilde{K}_{i_m}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$，如果对任意自然数 $n$，存在自然数 $m$ 使得 $K_{i_n}^{(n)}\supset\tilde{K}_{i_m}^{(m)}$、且反之亦然，那么说这两个判定列是等价的. 判定列的一个等价类称为一个<u>Stoïlow 端点</u>或<u>Stoïlow 理想边界点</u>，而 Stoïlow 端点的每个判定列都称为它的<u>代表列</u>. $R$ 的 Stoïlow 端点的全体称为 $R$ 的<u>Stoïlow(理想)边界</u>，记作 $\beta_s(R)$，简记为 $\beta_s$. 今

后，对任一 $\delta\in\beta_s$，式子 $\delta=\{D_n\}$ 表示 $\{D_n\}$ 是 $\delta$ 的一个代表列.

对 $R$ 的某一固定的穷尽列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 而言，判定列全体与 Stoïlow 理想边界 $\beta_s$ 的对应是一对一映上的. 置 $R_s^*=R\cup\beta_s$. 下面证明 $R_s^*$ 是 $R$ 的一紧致化. 设 $\delta=\{K_{i_n}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\in\beta_s$. 对固定的 $n$，记

$$\tilde{e}(K_{i_n}^{(n)})=\{\sigma\in\beta_s\mid 存在\ \sigma\ 的代表列含有\ K_{i_n}^{(n)}\ 为其项\}.$$

现在定义 $K_{i_n}^{(n)}\cup\tilde{e}(K_{i_n}^{(n)})$ 为 $\delta$ 一个邻域，由此得到 $\delta$ 的一邻域基. 从而 $R_s^*$ 是一 Hausdorff 空间. 可以证明 $R_s^*$ 是紧致的，称之为 $R$ 的<u>Stoïlow 紧致化</u>. 同时将 $\beta_s$ 称为 $R$ 的<u>Stoïlow 边界</u>.

设 $R\cup\alpha$ 是一个边界紧致的非紧镶边 Riemann 曲面，则存在一个开曲面 $\tilde{R}\supset R$，使得 $\tilde{R}\backslash R$ 是紧致的，且 $R$ 在 $\tilde{R}$ 上的相对边界是 $\alpha$. 记 $\tilde{R}_s^*$ 为 $\tilde{R}$ 的 Stoïlow 紧致化，并置 $R_{s,\alpha}^*=\tilde{R}_s^*\backslash(\tilde{R}\backslash R\cup\alpha)$. 将 $R_{s,\alpha}^*$ 称为 $R\cup\alpha$ 的<u>相对 Stoïlow 紧致化</u>. 紧致化所得空间的边界由两部分组成：(相对)边界 $\alpha$ 和理想边界 $\beta_s(R)$；后者将称之为 $R$ 的(相对)<u>Stoïlow 理想边界</u>. 显然 $R_{s,\alpha}^*$ 并不依赖于 $\tilde{R}$ 的选择，而是完全由 $R\cup\alpha$ 决定的.

设 $\delta\in\beta_s(R)$，而$\{D_k\}$是 $\delta$ 的代表列. 若点列$\{p_n\}\subset R$ 使得对任一 $D_k$，存在自然数 $N_k$，使得当 $n>N_k$ 时 $p_n\in D_k$，则称 $\{p_n\}$ <u>当 $n\to\infty$时趋于 $\delta$</u>，记为 $p_n\to\delta(n\to\infty)$或

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\delta.$$

对 $R\cup\alpha$ 上的单值半纯函数 $w=f(p)$，若有广义复值 $w$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(p_n)=w,$$

则称 $w$ 为 $f$ 在 $\delta$ 处的<u>聚值</u>. $f$ 在 $\delta$ 处的聚值全体记为 $C_R(f,\delta)$，称为 $f$ 在 $\delta$ 处的<u>聚值集</u>. 显然

(i) 对任一 $\delta\in\beta_s(R)$，$C_R(f,\delta)\subset C_R(f)$；

(ii) $f$ 在 $\delta$ 处的聚值集是闭集；

(iii) $\bigcup_{\delta\in\beta_s(R)}C_R(f,\delta)=C_R(f)$.

### 4.　半纯函数的渐近值

设 $R\cup\alpha$ 是一个边界紧致的非紧镶边 Riemann 曲面. 又设 $\gamma$: $p=p(t)$ $(0\leqslant t<1)$ 是 $R$ 上的一条曲线，而 $\delta=\{D_n\}$ 是 $R$ 的一 Stoïlow 理想边界点. 若对任意自然数 $n$，存在数 $\eta_n\in(0,1)$ 使得 $\gamma_n\subset D_n$，其中 $\gamma_n$: $p=p(t)$ $(\eta_n\leqslant t<1)$，则说 $\gamma$ 趋于理想边界点 $\delta$.

对于开 Riemann 曲面的情形，将上述 $\delta=\{D_n\}$ 代之以 $R$ 的一穷尽 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 即得 $\gamma$ 趋于理想边界 $\beta_*$ 的概念. 显然 $\gamma$ 趋于理想边界 $\beta_*$ 当且仅当 $\gamma$ 趋于某一 Stoïlow 理想边界点 $\delta$.

**定义 2**　设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的半纯函数. 对广义复值 $w$，若存在 $R$ 上的某一曲线 $\gamma$: $p=p(t), 0\leqslant t<1$，使得 $\gamma$ 趋于 Stoïlow 理想边界点 $\delta$ (对应地，理想边界 $\beta_*$)且

$$\lim_{t\to 1} f[p(t)]=w,$$

则称 $w$ 是 $f$ 在理想边界点 $\delta$ 处 (对应地，理想边界 $\beta_*$)的渐近值，$\gamma$ 称为渐近线. $f$ 在 $\delta$ 处 (对应地，$\beta_*$)的渐近值全体记作 $A_R(f,\delta)$ (对应地，$A_R(f,\beta_*)$，简记为 $A_R(f)$ )，称为 $f$ 在 $\delta$ 处 (对应地，$\beta_*$) 的渐近集.

显然，$w$ 是 $f$ 在理想边界 $\beta_*$ 的渐近值当且仅当 $w$ 是某一个 Stoïlow 理想边界点 $\delta$ 的渐近值.

把被 $f$ 取到无限多次的广义复值全体称为 $f$ 的无穷值域，记作 $R_R(f)$.

**引理 2**　设 $R\cup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数，若 $w_0\overline{\in}f(\alpha)$ 是 $n_f$ 的非连续点，则 $w_0\in\overline{A_R(f)}$.

**证**　据引理 1，$w_0\in C_R(f)$ 且 $n_f(w_0)<\infty$. 不妨设 $n_f(w_0)=0$，否则按引理 1 情形(2)的方法处理即可.

将 $R$ 的支点在球 $K$ 上的投影全体记为 $e$. 取一足够小的正数

$\rho$ 使得圆盘 $U:=O(w_0,\rho)$ 与 $f(\alpha)$ 不交. 由于 $w_0\in C_R(f)$，故存在点列 $p_i\in R$ 使得 $p_i\to\beta$ 且 $f(p_i)\to w_0(i\to\infty)$. 现在，记

$$w_i=f(p_i)、\quad U_i=\{w\mid |w-w_0|<1/2^i\},\ i=1,2,\cdots.$$

不妨设 $w_i\in U_i\backslash e$. 显然 $e$ 是全不连通闭的，故可依顺序将点 $w_i$ 和 $w_{i+1}$ 用 $U_i\backslash e$ 内的逐段光滑的简单弧段连接. 于是对于每个自然数 $i$，都有一从 $w_i$ 出发趋于 $w_0$ 的简单半开弧线 $\gamma_i$ 使得 $\gamma_i\supset\gamma_{i+1}$.

因为 $w_0\bar{\in}f(R)$，所以 $f^{-1}(\bar{\gamma}_i)$的每个分支都是非紧的. 否则假设有一个分支 $\sigma$ 是紧致的，则其投影 $f(\sigma)\subset\bar{\gamma}_i$ 也紧致. 于是在 $\bar{\gamma}_i$ 上，$f(\sigma)$ 存在着"最靠近" $w_0$ 的边界点，记为 $w_\sigma$. 由于 $w_0\bar{\in}f(R)$，故 $w_\sigma\neq w_0$. 又显然 $w_\sigma\neq w_i$. 则存在点 $p_\sigma\in\sigma$ 使得 $f(p_\sigma)=w_\sigma$ 且 $p_\sigma$ 不是 $R$ 的支点. 取一以 $w_\sigma$ 为心的足够小的圆盘 $U_\sigma$ 使得 $w_0\bar{\in}U_\sigma$ 且 $f^{-1}(U_\sigma)$ 有一分支 $V_\sigma$ 是 $\sigma$ 的单叶邻域. 于是 $\sigma':=V_\sigma\cap f^{-1}(\gamma_i)$是 $V_\sigma$ 内的简单开弧段，从而，$f(\sigma')$ 是 $w_0$ 在 $\gamma_i$ 的开邻域，这显然与 $w_\sigma$ 是"最靠近"点 $w_0$ 的假设相矛盾.

任取 $f^{-1}(\bar{\gamma}_i)$ 的一分支 $\sigma_i$. 则 $\sigma_i$ 必为 $R$ 上的简单弧线，且其投影 $f(\sigma_i)\subset\gamma_i$ 是一渐近线. 从而 $U_i$ 必含有 $f$ 的一渐近值. 于是可得 $w_0\in\overline{A_R(f)}$. ▌

**定理 1**　设 $R\cup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数，则

$$C_R(f)=\{\mathrm{Int}(R_R(f))\}\cup\overline{A_R(f)}.$$

**证**　不妨设 $w_0\bar{\in}f(\alpha)$. 事实上，若 $w_0\in f(\alpha)$，则可将 $\alpha$ 略为移动使得 $w_0\bar{\in}f(\alpha)$. 首先，若 $w_0\in C_R(f)\backslash\overline{R_R(f)}$，则 $n_f(w_0)<\infty$. 根据引理 2，$w_0\in\overline{A_R(f)}$.

其次，如果 $w_0\in\partial R_R(f)$，那么对于任意自然数 $n$，每个开圆盘 $U_n:=O(w_0,1/n)$ 内必含有两点 $w_n^1$ 和 $w_n^2$，分别使得 $n_f(w_n^1)<\infty$ 和 $n_f(w_n^2)=\infty$ 成立. 于是 $U_n$ 内必含 $n_f$ 的不连续点，记其之一为 $w_n$. 由引理 2 即可得 $w_n\in\overline{A_R(f)}$. 于是 $w_0\in\overline{A_R(f)}$. ▌

### 5. 半纯函数的大范围聚值集与价函数的关系

**引理 3**　设 $R\cup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数. 若 $\sup n_f(w)<\infty$，且 $f$ 的大范围聚值集 $C_R(f)$ 包含一个(非退化的)连续统 $\gamma$，则存在 $R$ 的非紧好子域 $\Delta$，使其满足下面两条件：

(i) 函数 $f$ 关于 $\Delta$ 的相对理想边界的大范围聚值集 $C_\Delta(f|_\Delta)$ 包含 $\gamma$ 的一个子连续统；

(ii) 除去一可能的全不连通之例外集外，在 $f(\Delta)$ 上有

$$n_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}.$$

**证**　记 $m=\sup n_f(w)$. 显然 $\gamma$ 的边界包含一无处稠密的连续统 $\gamma'$. 任取一 $C$-类点 $w_0\in\gamma'$，根据 §1 引理 1，存在一足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $O(w_0,\varepsilon)\setminus\gamma$ 非连通. 于是 $f^{-1}[O(w_0,\varepsilon)]$ 必有一非紧分支 $\Delta_1$ 使得 $f$ 关于它的相对理想边界的大范围聚值集 $C_{\Delta_1}(f|_{\Delta_1})$ 包含 $\gamma'$ 的一子连续统. 若 $\Delta_1$ 满足(ii)，则引理得证. 否则 $C_{\Delta_1}(f|_{\Delta_1})$ 至少包含 $\gamma'$ 的一子连续统 $\gamma_1$ 使得 $\gamma_1\cap f(\Delta_1)\neq\varnothing$. 于是，如果任取一点 $w_1\in\gamma_1\cap f(\Delta_1)$ 和足够小的 $\varepsilon_1>0$，使得 $O(w_1,\varepsilon_1)\setminus\gamma$ 是非连通的，那么 $f^{-1}[O(w_1,\varepsilon_1)]$ 必有一非紧分支 $\Delta_2$ 使得 $f$ 的大范围聚值集 $C_{\Delta_2}(f|_{\Delta_2})$ 包含 $\gamma_1$ 的一个子连续统，而且 $\sup n_{f|_{\Delta_2}}(w)\leqslant m-1$. 如果 $\Delta_2$ 满足(ii)，则引理得证. 否则只要重复上述过程不超过 $m-2$ 次即可得 $R$ 的满足(i)和(ii)的好子域 $\Delta$. ▌

**引理 4**　设 $R\cup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数，且 $\sup n_f(w)<\infty$.

(i) 若 $C_R(f)$ 是全不连通集，则存在 $R$ 的非紧好子域 $\Delta$，使得 $f$ 关于 $\Delta$ 的相对理想边界的大范围聚值集 $C_\Delta(f|_\Delta)$ 仍是全不连通的，且在 $f(\Delta)$ 上有 $n_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}$.

(ii) 若 $C_R(f)$ 是一非 $X$-可去集，则存在 $R$ 的非紧好子域 $\Delta$，

使集$\{w \mid n_{f|_\Delta}(w)=0,\ w\in f(\Delta)\}$是一非 X-可去集. 即 $f|_\Delta$不覆盖一个非 X-可去集.

**证** (i) 设 $m=\sup n_f(w)$. 取一 $w\in C_R(f)$ 及其足够小的好邻域 $G$, 使得 $G$ 的边界 $\sigma$ 为紧致的、$\sigma\cap C_R(f)=\varnothing$ 且 $f^{-1}(G)$ 的任意非紧分支 $\Delta'$ 都与 $\alpha$ 不交. 若 $f^{-1}(G)$ 没有满足要求的非紧分支. 则取其一, 并记为 $\Delta_1$. 于是存在 $w_1\in C_R(f)$ 使得 $f^{-1}(w_1)\cap\Delta_1$ 非空且恰好含有 $k$ 个点$(0<k<m)$. 取点 $w_1$ 的一足够小的边界 $\sigma_1$ 为紧致的好开邻域 $G_1$, 使得 $\sigma_1\cap C_R(f)=\varnothing$, 且 $f^{-1}(G_1)$ 恰好含有包含于 $\Delta_1$ 中的 $k$ 个紧致分支. 另外, 显然 $f^{-1}(G_1)$ 至少含有一包含于 $\Delta_1$ 中的非紧致分支 $\Delta_2$ 使得 $\sup n_{f|_{\Delta_2}}(w)\leqslant m-k$. 如果 $\Delta_2$ 也不满足要求, 那么必存在一 $w_2\in C_R(f)$ 使得 $f^{-1}(w_2)\cap\Delta_2$ 非空且含有不超过 $m-k$ 个点. 只要重复上述推理过程不超过 $m-k-1$ 次即可完成证明.

(ii) 若 $C_R(f)$ 包含一连续统, 则由引理 3, 可得(ii)成立. 若 $C_R(f)$ 是全不连通集, 则根据 § 1 引理 3, $C_R(f)$中的 X-不可去点是一不可数的紧致集, 将其全体记为 $C_R^0(f)$. 对集 $C_R^0(f)$进行类似于(i)中证明的推理即可知(ii)成立. ▌

类似地, 可以证明

**引理** 5　设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数. 若存在 $R$ 的一个好子域 $\Delta$, 使得除一非空的全不连通之例外集外, 在 $f(\Delta)$ 上 $n_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty$, 则存在 $R$ 的边界为紧致的非紧好子域 $\Delta'$, 使 $f$ 关于 $\Delta'$ 的大范围聚值集 $C_\Delta(f|_{\Delta'})$ 是全不连通的.

由引理 3、4、5 可得

**定理** 2　设 $R\cup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面, 其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数, 且 $\sup n_f(w)<\infty$. 则存在 $R$ 的一非紧好子域 $\Delta$, 使得在 $f(\Delta)$ 上有

$$n_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty.$$

且若 $C_R(f)$ 是全不连通的，则 $C_J(f|_J)$ 与 $C_R(f)$ 或同为 $X$-可去集、或同为 非 $X$-可去集.

## 6. Iversen 性质

**定义 2** 设 $R\bigcup\alpha$ 是一镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $\Phi$ 是 $R\bigcup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数 $w=f(p)$所产生的覆盖在 $w$-球面上的 Riemann 曲面. 称 $f$ 具有关于 $R$ 的理想边界 $\beta$ 的 Iversen 性质，或称 $\Phi$ 具有Iversen 性质，如果 $f$ 满足条件 a)和 b)：

a) $f$ 非常数；

b) 对于 $w$-球上的任一圆盘 $U$，若它满足条件 $f(\alpha)\bigcap U=\varnothing$ 和 $f(R)\bigcap U\neq\varnothing$，则 $f^{-1}(U)$ 的任一分支 $V$ 都使得 $U\backslash f(V)$ 在 $U$ 内是全不连通的，即 $U\backslash f(V)$ 不包含任一连续统.

设 $R'$ 是 $R$ 的子区域，其边界 $\alpha':=\partial R'$ 紧致，且 $R'\bigcup\alpha'$ 也是非紧镶边 Riemann 曲面，还有，$R'$ 的理想边界 $\beta'$ 是 $\beta$ 的子集. 将 $R\bigcup\alpha$ 上的单值半纯函数 $w=f(p)$ 在 $R'\bigcup\alpha'$ 上的限制记为 $f'$. 我们称 $f$ 具有关于 $\beta$ 的局部 Iversen 性质，或称 $\Phi$ 具有局部 Iversen 性质，如果 $f$ 还满足条件：

c) 不仅 $f$ 具有关于 $R$ 的理想边界 $\beta$ 的 Iversen 性质，而且 $f'$ 具有关于 $R'$ 的理想边界 $\beta'$ 的Iversen 性质.

显然，$f$ 具有关于 $\beta$ 的 Iversen 性质未必具有关于 $\beta$ 的局部 Iversen 性质. 例如，设 $W$ 是 $w$-球 $K:=\{w\,|\,|w|\leqslant\infty\}$ 的具有有限支点的两叶完全覆盖面. 又设 $U$ 是 $w$-球上的圆盘，使得 $W$ 盖在其上的部分是两个相对紧的单叶岛 $U_1$ 和 $U_2$. 将 $U_1$ 和 $U_2$ 在 $W$ 上的相对边界分别记为 $\alpha$ 和 $\beta$. 置 $R=W\backslash\overline{U_1\bigcup U_2}$. 那么 $R\bigcup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致的，而 $\beta$ 可看成它的理想边界. 将 $W$ 映上 $w$-球的自然投影在 $R\bigcup\alpha$ 上的限制记为 $f$，则 $f$ 是 $R\bigcup\alpha$ 上的一半纯函数，但显然具有关于 $\beta$ 的 Iversen 性质但不具有关于 $\beta$ 的局部 Iversen 性质.

但对于开(非镶边)Riemann 曲面而言，Iversen 性质与局部 Iversen 性质是等价的.

### 7. 关于 Iversen 性质的 Stoïlow 原理

设 $R\cup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数. 如果 $C_R(f)$不是完全的，那么将 $K\setminus C_R(f)$ 的全体分支记作 $\{W_i\}_i$，而且，对于每个 $i$，将 $W_i\setminus f(\alpha)$ 的全体分支记作 $\{W_{ij}\}_j$.

显然，若 $w_0\in W_{ij}$，则 $w_0\overline{\in} R_R(f)\cup\overline{A_R(f)}$，即得 $n_f(w_0)<\infty$. 根据引理 2，$w_0$ 是 $n_f$ 的连续点. 因此，$n_f$ 在 $W_{ij}$ 上是连续的，从而 $n_f(W_{ij})$ 为连通集. 但 $n_f$ 只取非负整数值，故有非负整数 $n_{ij}$ 使得

$$n_f|_{W_{ij}}\equiv n_{ij}.$$

将 $n_{ij}$ 称为 $W_{ij}$ 的<u>度数</u>.

**引理 6**　设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上具有局部 Iversen 性质的非常数半纯函数. 若点 $w_0\in\partial W_{ij}\setminus f(\alpha)$，则 $n_f(w_0)\leqslant n_{ij}-1$.

**证**　只要证明 $n_f(w_0)\neq n_{ij}$. 否则，假设 $n_f(w_0)=n_{ij}$. 记 $n=n_{ij}$，并设 $f^{-1}(w_0)=\{p_1,\cdots,p_n\}$，如引理 1 证明中的第(2)部分那样取 $U$ 和 $\{V_k\}$. 注意到 $w_0\in\partial W_{ij}\setminus f(\alpha)\subset\partial W_i\subset C_R(f)$，则 $f^{-1}(U)$ 有一非紧分支 $V$ 不与 $\bigcup_{k=1}^{n}V_k$ 相交. 又 $f$ 具有局部 Iversen 性质，故 $U\setminus f(V)$ 是全不连通的. 从而 $U\cap W_{ij}\cap f(V)$ 非空. 若任取其一点 $w$，则有 $f^{-1}(w)\geqslant n+1$，矛盾. 从而 $n_f(w_0)\leqslant n_{ij}-1$. ▌

**定理 3**　设 $R\cup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致的. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数. 那么

(i) 聚值集 $C_R(f)$是全不连通的当且仅当 $\sup n_f(w)<\infty$，且 $f$ 具有关于 $\beta$ 的局部 Iversen 性质.

(ii) 若 $C_R(f)$是全不连通的，则 $C_R(f)=A_R(f)$.

**证**　(i) 充分性由引理 3 可得.

必要性. 因为 $C_R(f)$ 是全不连通的，所以 $K\setminus C_R(f)$ 是连通开集. 将 $K\setminus C_R(f)\setminus f(\alpha)$ 的全体(有限个)分支记作 $\{W_j\}_j$. 设 $n_j$ 为 $W_j$ 的度数，则 $\sup\limits_{w} n_f(w)=\max\limits_{j} n_j<\infty$. 至于 $f$ 具有关于 $\beta$ 的局部 Iversen 性质是显然的.

(ii) 设 $w_0\in C_R(f)$. 不妨设 $w_0\overline{\in} f(\alpha)$. 因为 $C_R(f)$ 是全不连通的，所以可在球 $K$ 上取一边界为解析 Jordan 曲线 $\sigma$ 的足够小的单连通区域 $U$ 使得 $\sigma\cap f(\alpha)=\varnothing$. 那么 $f^{-1}(U)$ 必含有与 $\alpha$ 不交的非紧分支 $V$ 使得 $w_0\overline{\in} f(V)$. 将 $V$ 的盖在 $C_R(f)$ 上之点从 $V$ 上移去，所余之集记为 $V'$. 现在从 $U\setminus C_R(f)$ 内任一点 $w_1(\neq w_0)$ 出发取一趋于 $w_0$ 的弧线 $\gamma$. 由于 $V'$ 是 $U\setminus C_R(f)$ 的完全覆盖，故在 $V'$，从而在 $V$ 上必有其提升. 于是 $w_0\in A_R(f)$. ▌

**定理 4** (Stoïlow 原理) 设 $R\cup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致的. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\cup\alpha$ 上的非常数半纯函数，且具有局部 Iversen 性质，则 $f$ 必满足下面两条件之一：

(i) $C_R(f)$ 是完全的，即 $C_R(f)=K:=\{w\,|\,|w|\leqslant\infty\}$；

(ii) $C_R(f)$ 全不连通、其每点都是渐近值，即 $C_R(f)=A_R(f)$. 又，在 $K\setminus C_R(f)\setminus f(\alpha)$ 的每个分支上 $n_f$ 都取一有限常数值.

**证**　采用本段开头的记号. 假设 $C_R(f)$ 既非全不连通的，也非完全的. 下面将导出矛盾.

据假设，存在某个 $W_i$，其边界包含一连续统 $\gamma'$. 于是有某个 $W_{i_j}$ 使得 $\partial W_{i_j}\setminus f(\alpha)$ 包含 $\gamma'$ 的一子连续统 $\gamma$. 将 $W_{i_j}$ 的度数 $n_{i_j}$ 记为 $n$. 由 $C$-类点在 $\gamma$ 中是稠密的，故可取一 $C$-类点 $w_0\in\gamma$ 使得

$$m:=\max_{w\in\gamma} n_f(w)=n_f(w_0). \tag{1}$$

根据引理 6，有 $m\leqslant n-1$.

类似于引理 1，记 $f^{-1}(w_0)-\{p_1,\cdots,p_k\}$，$k\leqslant m$. 取一以 $w_0$ 为心的足够小的开圆盘 $U$ 使其满足：

a) $U\setminus\gamma$ 非连通，故 $U\cap\gamma$ 包含一连续统；

b) $f^{-1}(U)$有 $k$ 个相互不交的紧致分支$\{V_i\}_{i=1}^{k}$使得

$$p_i \in V_i \text{ 且 } \overline{V}_i \cap \alpha = \varnothing, \ 1 \leqslant i \leqslant k.$$

c) 并集$\bigcup_i V_i$覆盖 $U$ 的每一点止好 $m$ 次，其中重点按重次计算. 但 $f^{-1}(U)$必有非紧致分支，取其一并记为 $V$. 由 Iversen 性质可知 $U\backslash f(V)$ 或为空集或为全不连通集. 对照条件 a)可得

$$f(V) \cap (\gamma\backslash\{w_0\}) \neq \varnothing.$$

故存在点 $w_1\in \gamma\backslash\{w_0\}$ 使得 $w_1\in f(V)$，从而 $n_f(w_1)\geqslant m+1$. 与式(1)矛盾.

定理的其余结论由定理 3 和引理 6 可得之. ▌

**定理** 5　设 $R\bigcup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致的. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\bigcup\alpha$ 上的非常数半纯函数，且具有局部 Iversen 性质. 又设 $\delta\in\beta_s(R)$. 则 $f$ 必满足下面两条件之一：

(i) $C_R(f,\delta)$ 是完全的；　(ii) $C_R(f,\delta)$ 由单点组成.

**证**　设 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\delta$ 的一代表列，并记 $\alpha_n=\partial G_n$. 则有

$$R \supset G_{n-1} \supset G_n \cup \partial G_n.$$

于是 $C_R(f,\delta)=\overline{f(G_n)}$. 又置 $f_n=f|_{G_n\cup\alpha_n}$，则显然

$$C_R(f,\delta) \subset C_{G_n}(f_n,\beta_n) \subset \overline{f(G_n)},$$

其中 $\beta_n$ 是 $G_n\bigcup\alpha_n$ 的 Stoïlow 理想边界. 从而

$$C_{G_n}(f_n,\beta_n) \supset C_{G_{n+1}}(f_{n+1},\beta_{n+1}), \quad C_R(f,\delta) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{G_n}(f_n,\beta_n).$$

将 Stoïlow 原理用于 $C_{G_n}(f_n,\beta_n)$ 可知 $C_R(f,\delta)$ 或为全不连通或为完全. 在前一情形下，由于 $C_R(f,\delta)$ 是连通的，故必为单点. ▌

## §3　修正 Green 函数

### 1.　双极调和函数

设 $R$ 是一盖在复 $z$-球面上的开 Riemann 曲面，$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是其穷尽列，其中每个 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 假设 $R_0$ 是单叶圆盘：$\{z\,|\,|z|<\rho_0<1\}$，而 $\Gamma_0=\{z\,|\,|z|=\rho_0\}$. 又设 $g_n(z,0)$ 是 $R_n$ 的 Green 函数，并记

$$g_n(z,0)=\log\frac{1}{|z|}+\omega_n(z), \tag{1}$$

其中 $\omega_n(z)$ 在 $z=0$ 调和，而 $\omega_n(0)$ 是 Robin 常数. 置

$$\left.\begin{aligned} &M_n=\max_{z\in\Gamma_0}g_n(z,0),\quad u_n(z)=M_n-g_n(z,0),\\ &v_n(z)=g_n(z,0)-M_n-\log\frac{1}{|z|},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

则 $M_n>0$，且根据最大值原理，

$$u_n(z)>0,\quad \forall\, z\in R_n\backslash\bar{R}_0\,(n\geqslant 1). \tag{3}$$

由于在 $\Gamma_0$ 上 $u_1\geqslant 0$，且在某点 $z_0\in\Gamma_0$ 处 $u_n(z_0)=0$，则显然有 $u_1(z_0)-u_n(z_0)\geqslant 0$. 又由于 $u_1(z)-u_n(z)$ $(n\geqslant 2)$ 在 $R_1$ 内是调和的，根据最大值原理，则 $\max\limits_{z\in\Gamma_1}(u_1(z)-u_n(z))\geqslant 0$，或

$$\max_{z\in\Gamma_1}u_n(z)\leqslant\max_{z\in\Gamma_1}u_1(z)=M_1. \tag{4}$$

根据 Harnack 不等式，对任一与 $\Gamma_0$ 距离为正的 $R\backslash\bar{R}_0$ 的子曲面 $\Omega$，存在仅与 $\Omega$ 有关的常数 $K$ 使得若 $R_n\,(n\geqslant n_0)$ 包含 $\Omega$，则

$$|u_n(z)|=|g_n(z,0)-M_n|\leqslant K,\quad \forall\, z\in\Omega. \tag{5}$$

由于 $\{z\,|\,|z|\leqslant\rho_1\}(\rho_0<\rho_1<1)$ 包含于 $R_1$ 中，则在 $\{z\,|\,|z|=\rho_1\}$ 上

$$|v_n(z)| \leqslant |g_n(z,0) - M_n| + \log \frac{1}{|z|} \leqslant K + \log \frac{1}{\rho_1}. \qquad (6)$$

又由于 $v_n(z)$ 在 $\{z||z|\leqslant\rho_1\}$ 调和，根据最大值原理，式(6)在 $\{z||z|\leqslant\rho_1\}$ 上也成立. 因此

$$|v_n(0)| = |\omega_n(0) - M_n| \leqslant K + \log \frac{1}{\rho_1}.$$

由 (5)得

$$\left.\begin{aligned} &|g_n(z,0) - \omega_n(0)| \\ &\leqslant |g_n(z,0) - M_n| + |M_n - \omega_n(0)| \leqslant 2K + \log \frac{1}{\rho_1} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

在 $\Omega$ 内成立. 故在 $\{z||z|=\rho_1\}$ 上

$$|g_n(z,0) - \omega_n(0) - \log \frac{1}{|z|}| \leqslant 2K + 2\log \frac{1}{\rho_1}.$$

显然上式左边在 $\{z||z|\leqslant\rho_1\}$ 调和，则上式在 $\{z||z|\leqslant\rho_1\}$ 上仍成立. 又由于上式左边在 $z=0$ 处为 0，故在 $\{z||z|\leqslant\rho_0\}$ 上

$$|g_n(z,0) - \omega_n(0) - \log \frac{1}{|z|}| \leqslant \text{const.} \, |z| \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

从 $\rho_0>0$ 的任意性可得

**定理 1** 设$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$是覆盖在复 $z$-球面上的开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽列，而 $\Omega$ 是与 $z=0$ 距离为正的 $R$ 的紧子曲面，那么存在仅与 $\Omega$ 有关的常数 $K:=K$ 使得若 $R_n$ 包含 $\Omega$，则

$$|g_n(z,0) - \omega_n(0)| \leqslant K, \quad \forall\, z \in \Omega, \quad n \geqslant n_0,$$

且当 $|z|\leqslant\rho_0$ 时

$$|g_n(z,0) - \log \frac{1}{|z|} - \omega_n(0)| \leqslant \text{const.} \, |z|, \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由此可见，可从 $\{g_n(z,0)\}$ 中选一子列 (仍采用原记号)使得其在 $R\backslash\{0\}$ 上广义一致收敛于某个调和函数 $\tilde{g}(z,0)$，即

$$\lim_{n\to\infty}(g_n(z,0) - \omega_n(0)) = \tilde{g}(z,0), \qquad (1)$$

且 $\tilde{g}(z,0)-\log\frac{1}{|z|}$ 在 $z=0$ 处调和并取值 0. 于是有

**定理 2**　设 $R$ 是一覆盖在复 $z$-球面上的开 Riemann 曲面. 则对任意点 $z_0\in R$, 存在在 $R\backslash\{z_0\}$ 调和的函数 $\tilde{g}(z,z_0)$, 使得

$$\tilde{g}(z,z_0)-\log\frac{1}{|z-z_0|}$$

在 $z_0$ 处调和并取值 0.

**注**　如果 $R$ 存在 Green 函数 $g(z,z_0)$, 那么

$$\tilde{g}(z,z_0)=g(z,z_0)-\omega(z_0),$$

其中 $\omega(z_0)$ 是 $R$ 在 $z_0$ 的 Robin 常数.

**定理 3**　设 $R$ 是一覆盖在复 $z$-球面上的闭 Riemann 曲面. 又设 $z=0$、$z_0(\neq 0)$ 是 $R$ 上的两点, 若设 $\tilde{g}(z,0)$ 是开 Riemann 曲面 $R\backslash\{z_0\}$ 上具有定理 2 所述性质的函数, 则 $\tilde{g}(z,0)$ 在 $z_0$ 点有对数奇性 $-\log\frac{1}{|z-z_0|}$, 并使得 $\tilde{g}(z,0)+\log\frac{1}{|z-z_0|}$ 在 $z_0$ 处调和.

因此, 如果 $F$ 是闭 Riemann 曲面, 那么对其上任意不同的两点 $z_1$、$z_2$, 存在 $F\backslash\{z_1,z_2\}$ 内的调和函数, 使得在 $z_1$ 处具有对数奇性 $\log\frac{1}{|z-z_1|}$, 而在 $z_2$ 处具有对数奇性 $-\log\frac{1}{|z-z_2|}$.

**证**　设 $\Delta_n:=\{z\,|\,|z-z_0|\leqslant r_n\}$ $(r_1>r_2>\cdots>r_n\to 0)$ 是以 $z_0$ 为心的闭圆盘列. 置 $R_n=R\backslash\Delta_n$, 则 $\{R_n\}$ 是 $R\backslash\{z_0\}$ 的一穷尽列. 又设 $g_n(z,0)$ 是 $R_n$ 的 Green 函数, 则通过选择适当的子列可以假设

$$\lim_{n\to\infty}[g_n(z,0)-\omega_n(0)]=\tilde{g}(z,0). \tag{1}$$

记 $z-z_0=re^{i\theta}$, 因 $\tilde{g}(z,0)$ 在 $\{z\,|\,0<|z-z_0|\leqslant r_1\}$ 调和, 故可表成:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{g}(z,0)=\log r+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_kr^k+a_{-k}r^{-k})\cos k\theta\\+\sum_{k=1}^{\infty}(b_kr^k+b_{-k}r^{-k})\sin k\theta,\quad 0<r\leqslant r_1.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$\log r$ 的系数之所以等于 1 是因为：当 $\rho>0$ 足够小时，考虑以两圆周 $\{z||z|=\rho\}$ 和 $\{z||z-z_0|=r_1\}$ 为边界的 $R$ 的子区域即可得 $\log r$ 的系数等于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=r_1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial r_1}r_1\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=\rho}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\rho}\rho\mathrm{d}\varphi=1.$$

又由于 $g_n(z,0)$ 在 $\{z|r_n\leqslant|z-z_0|\leqslant r_1\}$ 调和，故对任意 $r\in[r_n,r_1]$

$$\left.\begin{aligned}&g_n(z,0)-\omega_n(0)=\log r+a_0^{(n)}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(n)}r^k+a_{-k}^{(n)}r^{-k})\cos k\theta+\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^{(n)}r^k+b_{-k}^{(n)}r^{-k})\sin k\theta,\end{aligned}\right\}(3)$$

与 (2)相同，这里 $\log r$ 的系数等于 1. 现在，由 (1)得

$$\lim_{n\to\infty}a_0^{(n)}=a_0,\quad \lim_{n\to\infty}a_{\pm k}^{(n)}=a_{\pm k},\quad \lim_{n\to\infty}b_{\pm k}^{(n)}=b_{\pm k}.\qquad(4)$$

由于在 $\{z||z-z_0|=r_n\}$ 上 $g_n(z,0)=0$，可得

$$\left.\begin{aligned}&\log r_n+a_0^{(n)}=-\omega_n(0),\ a_k^{(n)}r_n^k+a_{-k}^{(n)}r_n^{-k}=0,\\&b_k^{(n)}r_n^k+b_{-k}^{(n)}r_n^{-k}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

根据 (4)，$a_k^{(n)}$ 和 $b_k^{(n)}$ 都有界. 而当 $n\to\infty$ 时 $r_n\to0$，故由 (5)得 $a_{-k}=\lim\limits_{n\to\infty}a_{-k}^{(n)}=0$，　$b_{-k}=\lim\limits_{n\to\infty}b_{-k}^{(n)}=0$.　由此可见

$$\tilde{g}(z,0)=\log r+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta)\,r^k.$$

即得 $\tilde{g}(z,0)-\log r=\tilde{g}(z,0)+\log\dfrac{1}{|z-z_0|}$ 在 $z_0$ 处调和. ▌

**注**　事实上可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[g_n(z,0)-\omega_n(0)]$ 存在，所以不必从 $\{g_n(z,0)-\omega_n(0)\}$ 取子列.

## 2. 基本引理

**引理 1**　设 $R$ 是一盖在复 $z$-球面上的开 Riemann 曲面. 设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一个穷尽列，而 $\Gamma_n$ 是 $R_n$ 的边界，其中 $R_0$ 是一包含点 $z=0$ 单叶圆盘. 又设 $g_n(z,\zeta)$ 是 $R_n$ 的 Green 函数，而 $\omega_n(\zeta)$ 是

$R_n$ 关于点 $\zeta$ 的 Robin 常数. 那么有

(i) 设闭圆盘 $\Delta_0:=\overline{O(\zeta_0,\rho_0)}$ ($\rho_0>0$) 包含于 $R_n$ ($n\geqslant n_0$) 之中，则对任意 $\zeta\in\Delta_0$，存在仅与 $\Delta_0$ 有关的常数 $K:=K(\Delta_0)$ 使得

$$|\omega_n(\zeta)-\omega_n(\zeta_0)|\leqslant K|\zeta-\zeta_0|\quad(n\geqslant n_0).$$

(ii) 设 $\Omega$ 是 $R$ 的一紧子域，它与闭圆盘 $\Delta_0$ 的距离为正的，则对任意 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Delta_0$，存在仅与 $\Omega$、$\Delta_0$ 有关的常数 $K_1$ 使得

$$|g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)|\leqslant K_1|\zeta-\zeta_0|\quad(n\geqslant n_0).$$

**证** 设 $\rho_0<\rho_1<\rho_2$. 对应于 $i=0,1,2$，分别置

$$\Delta_i=\{z\,|\,|z-\zeta_0|\leqslant\rho_i\},\quad C_i=\{z\,|\,|z-\zeta_0|=\rho_i\}.\tag{1}$$

又设闭圆盘 $\Delta_2$ 包含在 $R$ 之中，且 $\Omega$ 在 $\Delta_2$ 之外. 如果 $g_{\Delta_2}(z,\zeta)$ 是 $\Delta_2$ 的 Green 函数，且 $\zeta\in\Delta_0$，则

$$g_{\Delta_2}(z,\zeta)=\log\left|\frac{\rho_2^2-\overline{(\zeta-\zeta_0)}(z-\zeta_0)}{\rho_2(z-\zeta)}\right|.\tag{2}$$

设 $\Delta_2$ 包含于 $R_n$ ($n\geqslant n_0$) 之中. 对 $\zeta\in\Delta_0$ ($\zeta\neq\zeta_0$) 置

$$\left.\begin{aligned}M_n(\zeta)&=\max_{z\in C_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}[g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)],\\u_n(z)&=M_n(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}[g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)],\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}M(\zeta)&=\max_{z\in C_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}[g_{\Delta_2}(z,\zeta)-g_{\Delta_2}(z,\zeta_0)],\\u(z)&=M(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}[g_{\Delta_2}(z,\zeta)-g_{\Delta_2}(z,\zeta_0)].\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

可以假设 $M_n(\zeta)\geqslant0$，否则只要在函数 $g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)$ 和 $g_{\Delta_2}(z,\zeta)-g_{\Delta_2}(z,\zeta_0)$ 中将 $\zeta$ 和 $\zeta_0$ 交换即可.

由于在 $C_1$ 上 $u_n(z)\geqslant0$，而由于在 $\Gamma_n$ 上 $u_n(z)=M_n(\zeta)\geqslant0$，根据最大值原理，

$$u_n(z)\geqslant0,\quad\forall\, z\in R_n\backslash\Delta_1.\tag{5}$$

又由于在 $C_1$ 上 $u(z)\geqslant0$，而在某一点 $z_1\in C_1$ 处 $u_n(z_1)=0$，所

以 $u(z_1)-u_n(z_1)\geqslant 0$. 显然 $u(z)-u_n(z)$ 在 $\Delta_2$ 是调和的，根据最大值原理，$\max\limits_{z\in C_2}[u(z)-u_n(z)]\geqslant 0$，故

$$\min_{z\in C_2} u_n(z)\leqslant \max_{z\in C_2} u(z)=M(\zeta)\leqslant K(\Delta_0). \tag{6}$$

根据 (5)、(6)和 Harnack 原理，

$$\begin{aligned}|u_n(z)| &= \left|M_n(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}[g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)]\right| \\ &\leqslant K(\Omega,\Delta_0), \qquad z\in\Omega,\ \zeta\in\Delta_0.\end{aligned} \tag{7}$$

因此，

$$\left.\begin{aligned}&\left|M_n(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}\left(g_n(z,\zeta)-\log\frac{1}{|z-\zeta|}-g_n(z,\zeta_0)\right.\right.\\ &\left.\left.+\log\frac{1}{|z-\zeta_0|}\right)\right|\leqslant K(\Delta_0),\quad \forall z\in C_2,\ \forall \zeta\in\Delta_0.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由于上式左边在 $\Delta_2$ 内关于 $z$ 是调和的，故 (8)对 $z\in\Delta_2$ 成立，从而在 $z=\zeta_0$、$z=\zeta$ 处有

$$\left|M_n(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}\left(g_n(\zeta_0,\zeta)-\log\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\omega_n(\zeta_0)\right)\right|\leqslant K(\Delta_0),$$

$$\left|M_n(\zeta)-\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}\left(\omega_n(\zeta)-g_n(\zeta,\zeta_0)+\log\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}\right)\right|\leqslant K(\Delta_0).$$

由此可得

$$\left|M_n(\zeta)-\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(\zeta_0)}{2|\zeta-\zeta_0|}\right|\leqslant K(\Delta_0) \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\left|\omega_n(\zeta)-\omega_n(\zeta_0)-2\left(g_n(\zeta,\zeta_0)-\log\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\omega_n(\zeta_0)\right)\right| \\ &\leqslant K(\Delta_0)|\zeta-\zeta_0|.\end{aligned} \tag{10}$$

根据定理 1，

$$\left|g_n(\zeta_0,\zeta)-\log\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|}-\omega_n(\zeta_0)\right|\leqslant K(\Delta_0)|\zeta-\zeta_0|.$$

再根据 (10)，

$$|\omega_n(\zeta)-\omega_n(\zeta_0)|\leqslant K(\Delta_0)|\zeta-\zeta_0|,\quad \forall\,\zeta\in\Delta_0. \qquad (11)$$

又由(9)有 $|M_n(\zeta)|\leqslant K(\Delta_0)$. 根据 (7), 对任意 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Delta_0$

$$|g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)|\leqslant K(\Omega,\Delta_0)|\zeta-\zeta_0|. \ \blacksquare$$

### 3. 修正 Green 函数

设 $\Omega_0$、$\Omega$ 是包含于 $R_n\,(n\geqslant n_0)$ 之中的 $R$ 的两个不交的紧子曲面. 那么, 根据引理和 Borel 有限覆盖定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在实数 $\delta:=\delta(\Omega_0,\Omega,\varepsilon)$ 和 $\eta:=\eta(\Omega_0,\varepsilon)$ 满足下列条件(1)—(3):

$$\left.\begin{array}{l}|g_n(z,\zeta_1)-g_n(z,\zeta_2)|<\varepsilon,\\ \quad 当\ z\in\Omega,\ \zeta_1\in\Omega_0,\ \zeta_2\in\Omega_0,\ |\zeta_1-\zeta_2|<\delta;\end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}|g_n(z_1,\zeta)-g_n(z_2,\zeta)|<\varepsilon,\\ \quad 当\ \zeta\in\Omega_0,\ z_1\in\Omega,\ z_2\in\Omega,\ |z_1-z_2|<\delta;\end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}|\omega_n(\zeta_1)-\omega_n(\zeta_2)|<\varepsilon,\\ 当\ \zeta_1\in\Omega_0,\ \zeta_2\in\Omega_0,\ |\zeta_1-\zeta_2|<\eta.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

因此, 如果假设 $z=0$ 属于 $R$, 则

$$\tilde{g}_n(z,\zeta)=g_n(z,\zeta)-\omega_n(0) \qquad (4)$$

关于 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Omega_0$ 是等度连续的. 下面将证明 $\tilde{g}_n(z,\zeta)$ $(n\in\mathrm{N})$ 关于 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Omega_0$ 是一致有界的.

设 $\zeta_0\in\Omega_0$ 是一固定点, 而 $\zeta\in\Omega_0$、$z\in\Omega$, 则

$$\left.\begin{array}{l}|\tilde{g}_n(z,\zeta)|\leqslant|g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)|\\ \quad +|g_n(z,\zeta_0)-\omega_n(\zeta_0)|+|\omega_n(\zeta_0)-\omega_n(0)|.\end{array}\right\} \qquad (5)$$

对 $n=1,2,3,\cdots$, 根据 (1), $|g_n(z,\zeta)-g_n(z,\zeta_0)|$ 关于 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Omega_0$ 一致有界; 根据定理 1, $|g_n(z,\zeta_0)-\omega_n(\zeta_0)|$ 关于 $z\in\Omega$ 一致有界; 根据 (3), $|\omega_n(\zeta_0)-\omega_n(0)|$ 也是一致有界的, 所以 $\tilde{g}_n(z,\zeta)$ 关于 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Omega_0$ 是一致有界的. 由此可以从 $\{\tilde{g}_n(z,\zeta)\}$ 选一子列 (仍然记为 $\{\tilde{g}_n(z,\zeta)\}$ )使得极限

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{g}_n(z,\zeta)=\tilde{g}(z,\zeta) \qquad (6)$$

存在, 且其收敛关于 $z\in\Omega$、$\zeta\in\Omega_0$ 是一致的. 再次从 $\{\tilde{g}_n(z,\zeta)\}$ 选

一子列（仍用原记号）使得对于固定的 $\zeta\in R$，式(6)在 $R\backslash\{\zeta\}$ 上关于 $z$ 为广义一致收敛的；对固定的 $z\in R$，式(6)在 $R\backslash\{z\}$ 上关于 $\zeta$ 为广义一致收敛的．因此，对固定的 $\zeta$，$\tilde{g}_n(z,\zeta)$ 是 $z(\neq\zeta)$ 的调和函数；对固定的 $z$，$\tilde{g}_n(z,\zeta)$ 是 $\zeta(\neq z)$ 的调和函数．

由 $g_n(z,\zeta)=g_n(\zeta,z)$ 即得

$$\tilde{g}_n(z,\zeta)=\tilde{g}_n(\zeta,z). \tag{7}$$

设 $\Delta_0$ 是 $R$ 上的单叶圆盘，$C_0$ 是其边界圆周．对 $z,\zeta\in\Delta_0$，置

$$\chi_n(z,\zeta)=g_n(z,\zeta)-\omega_n(0)-\log\frac{1}{|z-\zeta|}. \tag{8}$$

则 $\chi_n(z,\zeta)$ 分别关于 $z$ 和 $\zeta$ 在 $\Delta_0$ 内皆调和．由于对固定 $\zeta\in\Delta_0$，

$$\lim_{n\to\infty}\chi_n(z,\zeta)=\chi(z,\zeta)=\tilde{g}(z,\zeta)-\log\frac{1}{|z-\zeta|} \tag{9}$$

存在，且其收敛在 $C_0$ 上关于 $z$ 是一致的，故式(9)在 $\Delta_0$ 上关于 $z$ 一致成立．因此，对固定 $\zeta\in\Delta_0$，$\chi(z,\zeta)$ 在 $\Delta_0$ 上是 $z$ 的调和函数；而对固定 $z\in\Delta_0$，$\chi(z,\zeta)$ 在 $\Delta_0$ 上是 $\zeta$ 的调和函数．于是有

**定理 4**　设 $R$ 是一盖在复 $z$-球面上的开 Riemann 曲面．则 $R$ 上存在函数 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 满足下面条件：

(i) 对固定 $\zeta$，函数 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 关于变量 $z\,(\neq\zeta)$ 是调和的；对固定的 $z$，函数 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 关于变量 $\zeta(\neq z)$ 是调和的．

(ii) 设 $\Delta_0$ 是 $R$ 上的单叶圆盘，置

$$\tilde{g}(z,\zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\chi(z,\zeta),\quad \forall\, z,\zeta\in\Delta_0.$$

则对固定的 $\zeta\in\Delta_0$，函数 $\chi(z,\zeta)$ 在 $\Delta_0$ 上关于变量 $z$ 是调和的；对固定的 $z\in\Delta_0$，函数 $\chi(z,\zeta)$ 在 $\Delta_0$ 上是关于变量 $\zeta$ 是调和的．

(iii) $\tilde{g}(z,\zeta)=\tilde{g}(\zeta,z)$．

称 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 为 $R$ 上以 $\zeta$ 为其极点的<u>修正 Green 函数</u>．

### 4. 双对数奇性的位势函数

**定理 5**　设 $R$ 是覆盖在复 $z$-球面上的闭或开 Riemann 曲面，而 $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$ 是 $R$ 上的两点. 则 $R$ 上存在函数 $u(z,\zeta_1,\zeta_2)$ 使得：

(i) $u(z,\zeta_1,\zeta_2)$ 是 $z$ $(\neq\zeta_1,\zeta_2)$ 的调和函数. 而且

$$u(z;\zeta_1,\zeta_2)-\log\frac{1}{|z-\zeta_1|}\ 在\ z=\zeta_1\ 处调和;$$

$$u(z;\zeta_1,\zeta_2)+\log\frac{1}{|z-\zeta_2|}\ 在\ z=\zeta_2\ 处调和.$$

(ii) 设 $\Omega$ 是 $R$ 的包含点 $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$ 的单连通紧子曲面，其边界 $\Gamma$ 是一解析 Jordan 曲线. 则 $u$ 在 $R\backslash\Omega$ 上的 Dirichlet 积分有限，且关于 $\Omega$ 的边界 $\Gamma$ 之内法向 $v$，有

$$D_{R\backslash\Omega}[u]\leqslant\int_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial v}\,ds.$$

(iii) $u$ 在 $R\backslash\Omega$ 上为有界. 且若在 $\Gamma$ 上 $|u|\leqslant M$，则在 $R\backslash\Omega$ 上也有 $|u|\leqslant M$.

**证**　为简便起见，不妨设 $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$ 都不是 $R$ 上的支点.

首先设 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 则

$$u(z;\zeta_1,\zeta_2)=\tilde{g}(z,\zeta_1)-\tilde{g}(z,\zeta_2) \tag{1}$$

满足条件(i). 为证(ii)，设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一个穷尽列，而 $\Gamma_n$ 是 $R_n$ 的边界，其中 $\Omega\subset R_n$ $(n\geqslant n_0)$. 置

$$\begin{aligned}u_n=u_n(z;\zeta_1,\zeta_2)&=g_n(z,\zeta_1)-g_n(z,\zeta_2)\\&=[g_n(z,\zeta_1)-\omega_n(0)]-[g_n(z,\zeta_2)-\omega_n(0)],\end{aligned}$$

其中 $g_n$ 是 $R_n$ 的 Green 函数. 根据 (1)

$$\lim_{n\to\infty}u_n(z;\zeta_1,\zeta_2)=u(z;\zeta_1,\zeta_2).$$

由于在 $\Gamma_n$ 上 $u_n=0$，故 $D_{R_n\backslash\Omega}[u_n]=\int_\Gamma u_n\frac{\partial u_n}{\partial v}\,ds$. 所以若 $m<n$，则

$$D_{R_m\backslash\Omega}[u_n]\leqslant D_{R_n\backslash\Omega}[u_n]=\int_\Gamma u_n\frac{\partial u_n}{\partial v}\,ds.$$

令 $n\to\infty$，然后令 $m\to\infty$，则得

$$D_{R\setminus\Omega}[u]\leqslant\int_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial v}\,ds. \tag{2}$$

现在假设在 $\Gamma$ 上 $|u|\leqslant M$，下面证明 $R\setminus\Omega$ 上也有 $|u|\leqslant M$.

由于 $|u_n|$ 在 $R_n\setminus\Omega$ 是下调和的，且在 $\Gamma_n$ 上 $u_n=0$，故在 $R_n\setminus\Omega$ 上有 $|u_n|\leqslant\max\limits_{z\in\Gamma}|u_n|$，即知在 $R\setminus\Omega$ 上

$$|u|\leqslant\max_{z\in\Gamma}|u|. \tag{3}$$

其次，如果 $R$ 是闭 Riemann 曲面，可以从 $R$ 上移去一点 $z_0$，而后构造出开 Riemann 曲面 $R\setminus\{z_0\}$ 上满足条件 (i)—(iii)的函数 $u(z;\zeta_1,\zeta_2)$. 那么 $u$ 在 $z_0$ 的邻域内是有界，从而是调和的，故 $u$ 满足定理的条件. ▌

设 $\zeta_1$、$\zeta_2$ 是 Riemann 曲面 $F$ 上的两点，但不是 $F$ 的支点. 现用一不通过 $F$ 的支点的解析弧 $C$: $z=z(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，连接 $\zeta_1$、$\zeta_2$，其中 $z(0)=\zeta_1$、$z(1)=\zeta_2$，且规定 $C$ 的正方向为对应于 $t$ 增大的方向. 而 $C$ 的正法向 $v$ 规定如下：若将 $v$ 按逆时针方向旋转 $\pi/2$，则 $v$ 与 $C$ 的正切向重合.

设 $C$ 为双边的，将与正法向同侧的一边记为 $\dot{C}$，而另一边记为 $\ddot{C}$. 同时将每一点 $z\in C$ 看成两点，属于 $\dot{C}$、$\ddot{C}$ 者分别记为 $\dot{z}$、$\ddot{z}$.

**定理 6** 设 $F$ 是一覆盖在复 $z$-球面上的闭或开的 Riemann 曲面. 设 $\zeta_1$、$\zeta_2$ 是 $F$ 上的两点，但不是 $F$ 的支点，则存在 $F$ 上的函数 $v(z;\zeta_1,\zeta_2)$ 满足条件：

(i) $v(z;\zeta_1,\zeta_2)$ 是 $F\setminus\{C\}$ 上关于变量 $z$ 的单值调和函数，且使得对于任一点 $z\in C$

$$v(\dot{z};\zeta_1,\zeta_2)-v(\ddot{z};\zeta_1,\zeta_2)=2\pi.$$

因此 $v$ 可被越过 $C$ 延拓成 $F$ 上的无限多值的调和函数.

$$v(z;\zeta_1,\zeta_2)-\arg(z-\zeta_1)\ 在\ z=\zeta_1\ 处调和,$$

$$v(z;\zeta_1,\zeta_2)+\arg(z-\zeta_2)\ 在\ z=\zeta_2\ 处调和.$$

(ii) 设 $\Omega$ 是 $F$ 上的包含 $\zeta_1$、$\zeta_2$ 的一单连通紧子曲面，其边界是一解析 Jordan 曲线 $\Gamma$. 则 $v$ 在 $F\backslash\Omega$ 上的 Dirichlet 积分有限，且

$$D_{F\backslash\Omega}[v]\leqslant\int_\Gamma v\frac{\partial v}{\partial\nu}\mathrm{d}s,$$

其中 $\nu$ 是 $\Gamma$ 关于 $\Omega$ 的内法向.

(iii) $v$ 在 $F\backslash\Omega$ 上是有界的. 且若在 $\Gamma$ 上 $|v|\leqslant M$，则在 $F\backslash\Omega$ 上也有 $|v|\leqslant M$.

**证**　首先设 $F$ 是一开 Riemann 曲面. 对任意 $z\in F\backslash C$，置

$$v(z;\zeta_1,\zeta_2)=\int_C\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\nu_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|=\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\nu_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|.\qquad(1)$$

则 $v$ 是 $F\backslash C$ 上的单值调和函数.

设 $z_0=z(t_0)$ $(0<t_0<1)$ 是 $C$ 的一点，而 $U:=O(z_0,\rho)$ 是其不包含 $\zeta_1$、$\zeta_2$ 的单叶圆邻域. 若 $\rho>0$ 足够小，则圆周 $\{z\,|\,|z-z_0|=\rho\}$ 与 $C$ 必相交于两点 $z_1=z(t_1)$、$z_2=z(t_2)$ $(t_1<t_0<t_2)$.

又设 $z\in U$、$\zeta\in U$，

$$\tilde{g}(z,\zeta)=\log\frac{1}{|\zeta-z|}+\chi(z,\zeta),\qquad(2)$$

则根据 $\nu$ 的选取，对任意 $z\in U\backslash C$，

$$\begin{aligned}v(z;\zeta_1,\zeta_2)=&\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\nu_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|-\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}\arg(z-\zeta)\\&+\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial\chi(z,\zeta)}{\partial\nu_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|+\int_{z_2}^{\zeta_2}\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\nu_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|.\end{aligned}\qquad(3)$$

由于除 $\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}\arg(z-\zeta)$ 外所有的项都在 $z_0$ 处连续，故易得

$$v(\dot{z};\zeta_1,\zeta_2)-v(\ddot{z};\zeta_1,\zeta_2)=2\pi.\qquad(4)$$

由此可知 $v(z;\zeta_1,\zeta_2)-\arg(z-\zeta_1)$ 在 $\{z\,|\,0<|z-\zeta_1|<\rho\}$ 内是关于 $z$ 的单值有界调和函数，所以在 $z=\zeta_1$ 处调和.

类似地，$v(z;\zeta_1,\zeta_2)+\arg(z-\zeta_2)$ 在 $z=\zeta_2$ 处调和. 故(i)得证.

为证明(ii)，设 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $F$ 的一穷尽，其中每个 $F_n$ 的边界为

$\Gamma_n$. 记 $g_n(z,\zeta)$ 是 $F_n$ 的 Green 函数. 现将 $C$ 分成 $N$ 个长度相等的弧段 $\Delta s$, 而 $\xi_k$ $(k=1,2,\cdots,N)$ 是其分点,其中 $\xi_0=\zeta_1$、$\xi_N=\zeta_2$. 又设 $e^{i\theta_k}$ 是 $C$ 在 $\xi_k$ 处沿正法向 $\nu$ 的单位向量. 置

$$v_n^N(z;\zeta_1,\zeta_2)=\sum_{k=1}^{N}\frac{g_n(z,\xi_k+\delta e^{i\theta_k})-g_n(z,\xi_k)}{\delta}\Delta s,\quad \delta>0. \quad (5)$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\lim_{\delta\to 0}v_n^N(z;\zeta_1,\zeta_2)=\int_C\frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial \nu_\zeta}|d\zeta|=v(z;\zeta_1,\zeta_2).$$

由于在 $\Gamma_n$ 上 $v_n^N=0$,则

$$D_{F_m\setminus\omega}[v_n^N]\leqslant D_{F_n\setminus\omega}[v_n^N]=\int_{\gamma}v_n^N\frac{\partial v_n^N}{\partial \nu}\,ds\quad (m\leqslant n).$$

所以若依次令 $\delta\to 0$、$N\to\infty$、$n\to\infty$、$m\to\infty$,则可得

$$D_{F\setminus\omega}[v]\leqslant\int_{\gamma}v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds. \quad (6)$$

类似于定理 5 的证明可证得(iii).

至此,定理关于开 Riemann 曲面的情形已得证. 若 $F$ 是闭 Riemann 曲面,可从 $F$ 上移去一点 $z_0$,则类似于定理 5 的证明可证得 $F$ 是闭的情形. ▌

从上面的证明还可得

**定理 7**　设 $F$ 是一覆盖在复 $z$-球面上亏格 $p\geqslant 1$ 的闭 Riemann 曲面, $C$ 是 $F$ 上的一解析 Jordan 曲线,按上述方法定义正向,且 $C$ 即不通过 $F$ 的支点也不将 $F$ 分成两个不连通的部分. 则在 $F\setminus C$ 上存在单值调和函数 $v(z)$ 使得对于任一点 $z\in C$

$$v(\dot{z})-v(\bar{z})=1.$$

因此 $v(z)$ 可被越过 $C$ 延拓成 $F$ 上的无限多值的调和函数.

## 5. Poincaré 定理

**定理 8** (Poincaré 定理)　任一单连通紧致 Riemann 曲面必

与复球面共形等价.

**证**　设 $R$ 是一单连通紧致的 Riemann 曲面. 对 $R$ 上不同两点 $z_1$、$z_2$, 根据定理 5, 存在调和函数 $u$ 使得在 $z_1$ 处具有对数奇性 $-\log \frac{1}{|z-z_1|}$, 而在 $z_2$ 处具有对数奇性 $\log \frac{1}{|z-z_2|}$.

设 $v$ 是 $u$ 共轭调和函数, 则对 $R$ 上的任一闭曲线 $C$, 有

$$\int_C {}^*du = \int_C \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 2k\pi.$$

其中 $k$ 为某一个整数. 由此可见函数

$$f(z,z_1,z_2) := e^{u(z,z_1,z_2)+iv(z,z_1,z_2)}$$

是单值函数, 且 $f(z_1,z_1,z_2)=0$, $f(z_2,z_1,z_2)=\infty$. 事实上, $f$ 还是单价的, 因为由 $u$ 的单重对数奇性, 函数

$$F(z) := \frac{f(z,z_1,z_2)-f(t,z_1,z_2)}{f(z,t,z_2)}$$

在 $t$ 和 $z_1$ 处皆解析, 从而在 $R$ 上是单值解析的. 由于 $R$ 是紧致的, 故 $F(z)$ 恒为常数, 于是存在常数 $\lambda$ 使得

$$f(z,z_1,z_2)-f(t,z_1,z_2)\equiv\lambda f(z,t,z_2).$$

由此可见 $f(z,z_1,z_2)-f(t,z_1,z_2)=0$ 当且仅当 $z=t$. 故 $f$ 是单价的. 于是 $f$ 将 $R$ 共形映入复球面.

若 $R$ 紧致, 则 $f(R)$ 也紧致. 又 $R$ 是开的, 则 $f(R)$ 也是开的. 从 $f(R)$ 既开又闭可知 $f(R)$ 即为整个复球面. ▌

**定理 9**　任一单连非紧 $O_G$ 类 Riemann 曲面 $R$ 必与复平面共形等价.

**证**　应用定理 5. 与定理 8 的证明完全相同, $f$ 将 $R$ 共形映入复球面. 由于 $R$ 是单连非紧的, 则必与复球面 $K$ 关于一连通闭集 $\gamma$ 的余集 $K\setminus\gamma$ 共形等价. 但由 $R\in O_G$ 可得 $K\setminus\gamma\in O_G$. 根据第四章 §1 定理 4, $\gamma$ 必为单点集. 因此 $K\setminus\gamma$ 与复平面共形等价, 从而 $R$ 也与复平面共形等价. ▌

## §4　平面型 Riemann 曲面的共形映照

### 1.　调和函数和解析函数延拓的 Schwarz 对称原理

设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一好子域，其边界 $\Gamma$ 由最多可数条紧致或非紧致的分散的解析 Jordan 曲线组成. 将 $G$ 关于 $\Gamma$ 的双倍面记为 $\hat{G}$. 分别用 $\tilde{G}$ 和 $\tilde{p}$ 表示 $G$ 和 $p\in G$ 的对称象. 设 $u(p)$ 是定义在 $G\cup\Gamma$ 上的调和函数，且在 $\Gamma$ 上恒取值 0. 则函数

$$w(p)=\begin{cases} u(p), & \text{当 } p\in G\cup\Gamma, \\ -u(\tilde{p}), & \text{当 } p\in\tilde{G}\cup\Gamma \end{cases} \tag{1}$$

是 $\hat{G}$ 上的单值调和函数. 这说明 $u(p)$ 可越过边界 $\Gamma$ 延拓之.

设 $f(p):=u(p)+\mathrm{i}v(p)$ 是区域 $G$ 内的单值解析函数，且在 $\Gamma$ 每一点上其实部 $u(p)$ 都存在极限值 0. 置

$$f_0(p)=-\overline{f(\tilde{p})}=-u(\tilde{p})+\mathrm{i}v(\tilde{p})\quad(p\in\tilde{G}).$$

则 $f_0(p)$ 是 $\tilde{G}$ 内的非常数单值解析函数，且在 $\Gamma$ 每一点上其实部 $\mathrm{Re}\,f_0(p)$ 也都存在极限值 0.

对任一点 $p_0\in\Gamma$，设 $U$ 是 $p_0$ 的包含于 $\hat{G}$ 之中的参数邻域. 若记 $s(p)$ 为 $w(p)$ 在 $U$ 中的一个共轭调和函数，则根据单值性定理，$g(p):=w(p)+\mathrm{i}\,s(p)$ 必为 $U$ 内的单值解析函数. 如果置

$$F(p)=f(p)-g(p),\quad \forall\, p\in U\cap G,$$

那么可得 $\mathrm{Re}F(p)\equiv 0$. 从而 $f(p)-g(p)\equiv A_1(p_0)=\mathrm{const.}$. 于是函数 $g(p)+A_1(p_0)$ 是 $f(p)$ 在 $U$ 内的延拓. 从而对任意 $\zeta\in\Gamma$，极限

$$\lim_{G\ni z\to\zeta} f(z):=f(\zeta)$$

存在，且 $f(\zeta)=g(\zeta)+A_1(p_0)$. 同理可证，存在常数 $A_2(p_0)$ 使得函数 $g(p)+A_2(p_0)$ 是 $f_0(p)$ 在 $U$ 内的延拓. 故对任意 $\zeta\in\Gamma$，极限

$$\lim_{G \ni t \to \zeta} f_0(t) := f_0(\zeta)$$

必存在，而且 $f_0(\zeta)=g(\zeta)+A_2(p_0)$. 但是，由 $f_0$ 的取法可知在 $\Gamma$ 上 $f_0(\zeta)=f(\zeta)$，故 $A_1(p_0)=A_2(p_0)$. 于是函数

$$h(p)=\begin{cases} f(p), & \text{当 } p\in G \\ g(p)+A_1(p), & \text{当 } p\in \Gamma \\ f_0(p), & \text{当 } p\in \tilde{G} \end{cases}$$

是 $\hat{G}$ 内的非常数单值解析函数，它是 $f(p)$ 在 $\hat{G}$ 内的延拓.

由此可见下面两论点是等价的：

(i) $f(p)$ 是区域 $G$ 内的单值解析函数，且其实部在 $\Gamma$ 上取极限值 0.

(ii) $f(p)$ 是 $G\cup\Gamma$ 上的非常数单值解析函数.

今后常用到此事实.

## 2. 平面型区域与复球面子区域共形同胚

先证明有关单叶半纯函数列极限函数的一个定理.

**定理 1** 设开 Riemann 曲面 $R$ 上定义有一列广义一致收敛的单叶半纯函数列 $\{f_n\}$，其中每个 $f_n$ 都具有同一个(一级)极点. 若 $\{f_n\}$ 的极限函数 $f(z)$ 是非常数单值半纯函数，则 $f(z)$ 必为单叶的.

**证** 显然 $f(z)$ 也必具有同一个(一级)极点.

假设 $w=f(z)$ 不是单价的，那么 $R$ 上必存在不同的两点 $z_0$、$z_1$ 使得 $f(z_0)=f(z_1)$，将其记为 $w_0$，不妨设 $w_0\neq\infty$. 现在，取一足够小的正数 $\varepsilon$ 使得圆盘 $\Sigma:=\{w\,|\,|w-w_0|<\varepsilon\}$ 的逆象 $f^{-1}(\Sigma)$ 中有一单连通分支 $U$ 包含 $z_0$、$z_1$ 之一，不妨设 $U$ 是单页的，$z_0\in U$，且使得 $z_1\overline{\in}\overline{U}$.

由于 $f_n(z)$ 在 $\overline{U}$ 上一致收敛于 $f(z)$. 从而存在自然数 $N$，使得当 $n>N$ 时

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/4, \quad \forall z \in U. \tag{1}$$

于是对任意 $\zeta \in \partial U$ 有

$$|f_n(\zeta) - w_0| \geqslant |f(\zeta) - w_0| - |f_n(\zeta) - f(\zeta)| > \varepsilon/2. \tag{2}$$

根据式(1)和式(2)，每个 $f_n$ ($n>N$) 都将 $U$ 的边界 $\partial U$ 共形映成环绕圆盘 $O(w_0,\varepsilon/2)$ 的闭曲线，且 $f_n(z_0)\in O(w_0,\varepsilon/2)$. 又因为 $f_n(U)$ 是单连通的. 故

$$f_n(U) \supset O(w_0,\varepsilon/2) \ (n > N). \tag{3}$$

另一方面，由于 $f_n(z_1)\to f(z_1)=w_0$ ($n\to\infty$)，则存在一自然数 $n_0>N$ 使得 $f_{n_0}(z_1)$ 属于 $O(w_0,\varepsilon/2)$，从而属于 $f_{n_0}(U)$. 于是 $f_{n_0}$ 不是单价的. 与已知与矛盾.

矛盾说明假设错误，故 $f$ 是单价的. ▌

设 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 若 $R$ 上的任一(紧)Jordan 曲线都能将其分成两个(不交)子曲面 $R_1$、$R_2$，则 $R$ 称为平面型的.

**定理** 2 (Koebe **基本定理**) 平面型的开 Riemann 曲面可被共形映上复球面的某一单叶子区域.

**证** 设$\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$是平面型的开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽，而 $R_n$ 的边界为有限 $m$ 条紧致解析 Jordan 曲线. 现在用 $m$ 个单位圆盘共形嵌入 $R_n$，记这 $m$ 个单位圆周之象为$\{\Delta_n^i\}_i$，使得每个 $\Delta_n^i$ 分别与 $R_n$ 的一边界曲线粘合. 将按上述方法所构造得的 Riemann 曲面记为 $R_n'$. 容易验证 $R_n'$ 是单连通且紧致的，因而 $R_n'\setminus\overline{\Delta}_n^1$ 是单连通相对紧致的. 根据 Riemann 映照定理，$R_n'\setminus\overline{\Delta}_n^1$ 可被共形映上开单位圆盘，从而 $R_n$ 可被共形映上复球面的某一单叶子区域.

设 $w=f_n(z)$是上述对应于 $R_n$ 的共形映照，并将其规范化为 $f_n(z_0)=0$、$f_n'(z_0)=1$，其中 $z_0\in R_0$. 又设 $\Omega$ 是 $R$ 的包含 $z_0$ 的任一紧致子区域. 根据 Koebe 偏差定理，存在一仅与区域 $\Omega$ 有关的常数 $K:=K(\Omega)$使得

$$|f_n(z)| \leqslant K, \quad \forall z \in \Omega.$$

因此可从$\{f_n(z)\}$选取一子列，仍记为$\{f_n(z)\}$，使其在 $R$ 上广义一致收敛于 $R$ 上的一单叶半纯函数 $f(z)$，且 $f(z_0)=0$、$f'(z_0)=1$. 从而 $f$ 将 $R$ 共形映上 $w$-复球面的某一单叶子区域. ▌

**注**　根据 Koebe 基本定理和第二章 § 1. 8 的 Jordan 曲线定理，平面型 Riemann 曲面的概念与第二章 § 1. 11 平面型区域的概念是一致的. 于是，$R$ 是单连通的当且仅当 $R$ 是平面型的且被 Jordan 曲线分成两部分中至少有一个是紧致的.

**定理 3**　单连通的开 Riemann 曲面 $R$ 可被共形映上复平面或开单位圆盘.

**证**　根据定理 1，$R$ 可被共形映上复球面 $K$ 的某一单叶子区域 $\Delta$. 由于 $R$ 是单连通开区域，故 $\Delta$ 也是单连通开区域. 于是集合 $K\backslash\Delta$ 是闭紧的且为连通的. 若 $K\backslash\Delta$ 是一(非退化)连续统，则根据 Riemann 映照定理，$\Delta$ 可被共形映上开单位圆盘，因此 $R$ 可被共形映上开单位圆盘. 若 $K\backslash\Delta$ 只含一点，则 $\Delta$ 可被共形映上复平面，所以 $R$ 可被共形映上复平面. ▌

**推论**　任一单连通的开 Riemann 曲面都有单连通穷尽列.

### 3.　多连通区域的调和测度

设 $\Omega$ 是复 $z$-平面 $S$ 上的一多连通区域，其连通数 $n>1$. 将其关于 $S$ 之余集的分支记为 $E_1$、$E_2$、$\cdots$ 、$E_n$，其中 $E_n$ 是唯一的无界分支. 不妨设每个分支都不只一点，因为单点集对任一映照函数都是可去奇点(参看第五章 § 1. 3). 根据 Riemann 映照定理，区域 $S\backslash E_n$ 可被共形映上开单位圆盘 $U$. 于是 $\Omega$ 被共形映成 $U$ 内的新(有界)开区域、每个 $E_i\,(i=1,\cdots,n-1)$ 被共形映成 $U$ 内的(有界)闭子集，而 $E_n$ 则是对应于开单位圆盘 $U$ 的外部. 取关于 $U$ 为正向的边界圆周记为 $C_n$，它是新开区域的外边界，称之为<u>外围道</u>. 为方便，经共形映照后的的集合都采用原记号.

同理，$S\backslash E_1$ 可被共形映上闭单位圆盘的外部，使得$\infty$对应于

$\infty$. 此时, $C_n$ 的象是一有向紧致解析 Jordan 曲线. 将取负向的新单位圆周 $C_1$ 称为内围道. 如此继续进行下去, 直到 $\Omega$ 被共形映成不含点 $z=\infty$的、以 $C_n$ 为外围道、以 $C_1$、…、$C_{n-1}$ 为内围道的区域, 其中每一围道都是有向紧致解析 Jordan 曲线.

下面所提及的区域 $\Omega$ 都被认定已经上述规范化. 设 $\omega_k$ 是 $\Omega$ 关于边界围道 $C_k$ 的调和测度. 则

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k \equiv 1,\ 0 < \omega_k < 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

由于每个边界围道上的点都存在垒, 故有

$$\omega_k = 1, \quad \forall z \in C_k; \quad \omega_k = 0, \quad \forall z \in \bigcup_{i\neq k} C_i. \tag{1}$$

因此, 根据对称原则, $\omega_k$ 可越过每个边界围道调和延拓之.

一般地, $\omega_k$ 的共轭调和函数是多值的, 它沿 $C_j$ 有周期

$$\alpha_{kj} := \int_{C_j}\frac{\partial\omega_k}{\partial v}\mathrm{d}s = \int_{C_j}{}^*\mathrm{d}\omega_k. \tag{2}$$

更一般地, 常系数组合

$$u(z) := \lambda_1\omega_1(z) + \lambda_2\omega_2(z) + \cdots + \lambda_{n-1}\omega_{n-1}(z) \tag{3}$$

不可能有单值共轭调和函数, 除非所有的 $\lambda_i$ 都为 0. 事实上, 如果存在以 $u(z)$ 为实部的单值解析函数 $w=f(z)$, 根据解析函数延拓的对称原则, $f(z)$可解析延拓到 $\Omega$ 的闭包 $\overline{\Omega}$. 根据(1),

$$\mathrm{Re}f(z) = 0, \quad \forall z \in C_n;$$

$$\mathrm{Re}f(z) = \lambda_k, \quad \forall z \in C_k,\ k = 1,\cdots,n-1.$$

则每个边界围道都被 $f$ 映成垂直于实轴的直线段. 将它们之并集记为 $\Gamma$. 假设 $f$ 是非常数的, 则 $f(z)$在 $\Omega$ 内可取到不在这些线段上的某个值 $w_0$. 显然在每个边界围道上可定义 $\arg(f(z)-w_0)$的一单值分支. 但根据幅角原理, $\Gamma$ 关于 $w_0$ 的指数

$$\left.\begin{aligned} n(\Gamma, w_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\bigcup\limits_i C_i}\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\bigcup\limits_i C_i} d\arg(f(z)-w_0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

即 $f(z)-w_0$ 在 $\Omega$ 内无零点. 矛盾. 由此可见 $f(z)$ 恒为常数，其实部 $u(z)$ 也恒为常数. 但根据(1)，在 $C_n$ 上有 $u(z)\equiv 0$，因此在 $\bar{\Omega}$ 上也有 $u(z)\equiv 0$. 从而 $u(z)$ 在每个 $C_k$ 上的边界值为 $\lambda_k=0$.

## 4. 多连通区域与同心圆弧裂缝环域共形同胚

设第 3 段式(3)所定义的函数 $u(z)$ 是非常数的. 如果

$$\lambda_1\alpha_{1j}+\lambda_2\alpha_{2j}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,j}=0, (j=1,\cdots,n-1) \quad (1)$$

那么 $u(z)$ 有单值共轭调和函数. 因此，若将(1)看成是 $\lambda_k$ $(k=1, 2,\cdots,n-1)$ 的齐次方程组，则上段落所证明的是方程组(1)只有平凡解 $\lambda_k=0$. 根据线性方程理论，以(1)的系数为系数的非齐次方程组必有一个解. 特别，可解出方程组

$$\begin{cases} \lambda_1\alpha_{11}+\lambda_2\alpha_{21}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,1}=2\pi, \\ \lambda_1\alpha_{12}+\lambda_2\alpha_{22}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,2}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1\alpha_{1,n-1}+\lambda_2\alpha_{2,n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n-1}=0, \\ \lambda_1\alpha_{1n}+\lambda_2\alpha_{2n}+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha_{n-1,n}=-2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

方程组(2)中最后一个方程是前面 $n-1$ 个方程的结果(这是因为 $\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\cdots+\alpha_{kn}=0$). 换言之，我们可求得一多值积分 $f(z)$ (即以 $u(z)$ 为实部的多值解析函数)，使得它沿 $C_1$ 及 $C_n$ 上的周期皆为 $\pm 2\pi i$、所有其它周期都等于零，并且它的实部在 $C_k$ 上恒等于 $\lambda_k$ (令 $\lambda_n=0$). 于是函数 $F(z)=e^{f(z)}$ 是单值的. 下面证明定理：

**定理** 4　函数 $w=F(z)$ 把 $\Omega$ 一一共形映上一个区域，它由圆环域 $\{w\,|\,1<|w|<e^{\lambda_1}\}$ 内减去位于圆周 $\{w\,|\,|w|=e^{\lambda_i}\}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$

上的 $n-2$ 段同心弧组成.

为证明定理，记 $\sigma_k=\{w \mid |w|=e^{\lambda_k}\}$，并用 $\Gamma_k$ 表示 $C_k$ 关于 $F$ 在 $w$-平面上的象. 显然 $\Gamma_k \subset \sigma_k$. 置 $\Gamma=\bigcup_k \Gamma_k$. 根据幅角原理，

$$n(\Gamma_1,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f'(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_{C_1} {}^*\mathrm{d}u=1. \tag{3}$$

若 $|w_0|>e^{\lambda_1}$，则显然

$$n(\Gamma_1,w_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0}=0.$$

假设 $\Gamma_1$ 关于 $w$-平面的余集 $\Gamma_1^c$ 是连通的. 根据连续性有

$$n(\Gamma_1,w_0)=0, \quad \forall\, w\in \Gamma_1^c.$$

与式(7)矛盾. 由此可见 $\Gamma_1$ 关于 $w$-平面的余集 $\Gamma_1^c$ 不是连通的，故得 $\sigma_1=\Gamma_1$. 于是当 $|w_0|<e^{\lambda_1}$ 时，

$$n(\Gamma_1,w_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0}=1.$$

同理， $n(\Gamma_n,w_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0}$ 当 $|w_0|<1$ 时恒为 $-1$，而 $|w_0|>1$ 时则为 0.

同样， $n(\Gamma_k,w_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0}$ $(1<k<n)$ 当 $|w_0|\neq e^{\lambda_k}$ 时恒为 0. 但对于点 $w_0\in F(\Omega)\setminus\bigcup_k \sigma_k$, $w_0$ 关于 $F$ 的原象的个数

$$n(\Gamma,w_0)=\sum_{k=1}^{n} n(\Gamma_k,w_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0} \tag{4}$$

不小于 1. 所以，只能是 $n(\Gamma_1,w_0)=1$； $n(\Gamma_k,w_0)=0$ $(1<k\leqslant n)$. 所以

$$n(\Gamma,w_0)=1, \quad \forall\, w_0\in F(\Omega)\setminus\bigcup_k \sigma_k. \tag{5}$$

因此 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$. 从而 $\lambda_1>0$. 根据 $n(\Gamma,w_0)$ 的连续性,

$$0\leqslant\lambda_k\leqslant\lambda_1\ (1<k\leqslant n).$$

下面证明映照关于 $\Omega$ 的内、外边界 $C_1$、$C_n$ 也是一对一的.

若边界上有单极存在，则留数定理仍可应用，但此时围道积分应以其 Cauchy 主值代替之，且留数的和应包括边界上留数的半值. 对于目前情形来说，后一约定是指边界上所取的值应按其重数的一半计算. 至于主值的计算，则无困难. 如 $|w_0|=e^{\lambda_k}$，则

$$\text{pr. v.}\int_{C_k}\frac{F'(z)\mathrm{d}z}{F(z)-w_0}=\frac{1}{2}\int_{C_k}\frac{F'(z)}{F(z)}\mathrm{d}z.$$

因为根据初等几何的原理，

$$\mathrm{d}\arg(F(z)-w_0)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\arg F(z).$$

因此，若 $k=1$，则式(4)中的主值等于$\frac{1}{2}$；若 $2\leqslant k\leqslant n-1$，则等于 0；若 $k=n$，则等于$-\frac{1}{2}$.

所以，当 $|w_0|=1$ 或 $|w_0|=e^{\lambda_1}$ 时，每一值取半次，即在边界上取一次. 这就证明了 $C_1$ 及 $C_n$ 的映照是一对一的，而且 $0<\lambda_k<\lambda_1$ $(1<k\leqslant n)$. 其次，当 $1<|w_0|<e^{\lambda_1}$ 时，$w_0$ 的值或为内点取一次、或为为边界点取二次，或为二重点取一次. 在每个围道 $C_2,\cdots,C_{n-1}$ 上，可定义 $\arg F(z)$的一单值分支，其中重数为二的点对应于 $\arg F(z)$相对极大和极小值. 但 $\arg F(z)$至少有一极大值和一极小值，但也不能多，否则 $F(z)$将过同一值超过二次. 此外，极大值和极小值之差应小于 $2\pi$，这说明每个围道被映成一段特定的弧. 最后，不同围道的象是两两不交的.

## 5.　多连通区域与平行裂缝区域共形同胚

设 $g(z,z_0)$是区域 $\Omega$ 的 Green 函数，其中 $z_0\in\Omega$，而 $h(z,z_0)$是其(多值)共轭调和函数. 置

$$G(z,z_0)=g(z,z_0)+\log|z-z_0|. \tag{1}$$

则 $G(z,z_0)$是 $\Omega$ 内的调和函数，且

$$^*\mathrm{d}g={}^*\mathrm{d}G-\mathrm{d}\arg(z-z_0).$$

**引理 1**　$\int_{c_k} {}^*\mathrm{d}g(z,z_0) = 2\pi\omega_k(z_0),\ k = 1,\cdots,n.$

**证**　以 $z_0$ 为心，作一个足够小的圆盘 $\delta$，使其边界圆周 $c$ 关于 $\Omega\backslash\delta$ 为正向. 根据 Green 公式，

$$\int_{c_k} \mathrm{d}h(z,z_0) = \int_{c_k} {}^*\mathrm{d}g(z,z_0)$$

$$= \int_{\bigcup c_i} \omega_k {}^*\mathrm{d}g - g\ {}^*\mathrm{d}\omega_k = \int_c \omega_k {}^*\mathrm{d}g - g\ {}^*\mathrm{d}\omega_k$$

$$= \int_c \omega_k {}^*\mathrm{d}G - G\ {}^*\mathrm{d}\omega_k + \int_c \log|z - z_0|\ {}^*\mathrm{d}\omega_k$$

$$- \int_c \omega_k \mathrm{d}\arg(z - z_0) = 2\pi\ \omega_k(z_0).\ \blacksquare$$

若记 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$，则 $\frac{\partial}{\partial x_0}G(z,z_0)$ 是 $\Omega$ 内的调和函数，并有边值 $-\mathrm{Re}\,\frac{1}{\zeta - z_0}$. 于是由式(1)可得 $u_1(z) := \frac{\partial}{\partial x_0}g(z,z_0)$ 对 $z \neq z_0$ 调和、在边界上取值 0，并与 $\mathrm{Re}\,\frac{1}{z - z_0}$ 相差一调和函数.

记 $A_k = \int_{c_k} {}^*\mathrm{d}u_1$. 根据第 4 段关于方程组(1)的讨论，下面关于 $\lambda_j$ 的方程组

$$\lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1,j} = - A_k,\ (j = 1,\cdots,n - 1) \quad (2)$$

恒有一个解. 用该解构造的线性组合

$$u_1(z) + \lambda_1\omega_1(z) + \lambda_2\omega_2(z) + \cdots + \lambda_{n-1}\omega_{n-1}(z) \quad (3)$$

的共轭调和函数的周期为 0. 因此确定了一个函数 $p(z)$ 的存在，这一函数除了在 $z_0$ 处具有留数为 1 的一单极点之外，在 $\Omega$ 内单值解析，而且它的实部在每一围道上都是常数. 根据这些条件，函数 $p(z)$ 除了一附加常数外是唯一确定的.

如果对 $y_0$ 求导，那么类似可得结论：函数 $v_2(z):=\frac{\partial}{\partial y_0}g(z,z_0)$ 在边界上取值 0，并与 $\mathrm{Im}\,\frac{1}{z-z_0}$ 有同样的奇性. 若 $v_2(z)$ 与调和测度一起构造一适当的线性组合，则其共轭调和函数将是单值的. 于是可知存在 $\Omega$ 内的一单值解析函数 $q(z)$，其奇部为 $\frac{1}{z-z_0}$，而其虚部在每一围道上都是常数.

由函数 $p(z)$ 及 $q(z)$ 可得简单的典型映照.

**定理 5**　由 $p(z)$ 及 $q(z)$ 所确定的映照是一对一的，$\Omega$ 的象是一带有裂缝的区域，它的余集分别由 $n$ 条垂直的或水平的线段组成.

这一定理的证明与定理 3 的证明相仿. 此时表达式

$$n(\Gamma,w_0)=\sum_{i=1}^{n}n(\Gamma_i,w_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{p'(z)\mathrm{d}z}{p(z)-w_0} \tag{4}$$

所表示的是 $p(z)-w_0$ 的零点数减去其极点数. 不难看出式(4)对所有的 $w_0$，包括边值在内，都等于零. 在边值情况下应取主值；但若 $w_0$ 取在 $C_i$ 上，则 $\frac{p'(z)\mathrm{d}z}{p(z)-w_0}$ 的虚部在 $C_i$ 上等于零，因此不会有困难. 由于肯定只有一个极点，故 $p(z)$ 在 $\Omega$ 内部取每一值一次，而在边界上取每一值二次、或在重数为 2 的边界上取每一值一次. 至于证明的其余部分与上一段的完全一样. 而关于 $q(z)$，同样的证明也正确.

具有平行裂缝的区域可当作典型域，但它们不都是共形等价的即使要求点∞对应于点∞也是如此. 例如，由 $p(z)$ 及 $\mathrm{i}\,q(z)$ 所作的映照映出不同的裂缝区域，但都是共形等价的. 除了一平行的平移外，裂缝的映照只是对在 $z_0$ 处具有同样留数的映照而言，才是唯一确定的.

### 6. 单值化定理

**定理 6**　设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是单连通开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽列，其中每个 $R_n$ 都是单连通的．又设 $R$ 存在 Green 函数 $g(z,a)$，将其(多值)共轭调和函数记为 $h(z)$．若置 $f(z)=\mathrm{e}^{-[g(z,a)+\mathrm{i}\,h(z)]}$，则存在一列分别将 $R_n$ 一对一共形映上开单位圆盘的映照 $f_n(z)$，使其在 $R$ 上广义一致收敛于 $f(z)$，从而 $f(z)$ 是一对一的．

**证**　对每个自然数 $n$，将 $R_n$ 的 Green 函数记为 $g_n(z,a)$，而将其(多值)共轭调和函数记为 $h_n(z)$．置

$$f_n^*(z)=\mathrm{e}^{-[g_n(z,a)+\mathrm{i}\,h_n(z)]}. \tag{1}$$

则 $f_n^*(z)$ 为 $R_n$ 上的单值解析函数．记

$$G_n(z)=g(z,a)-g_n(z,a),$$

那么 $G_n(z)$ 是 $R_n$ 上的调和函数．将 $G_n(z)$ 的单值共轭调和函数记为 $H_n(z)$，并规范化为 $H_n(z_0)=0$，其中 $z_0\neq a$．置

$$\varphi_n(z)=G_n(z)+\mathrm{i}\,H_n(z). \tag{2}$$

于是由 $\{g_n\}$ 的广义一致收敛性可知 $\varphi_n$ 的实部在 $R$ 上广义一致收敛于 0．注意到 $\varphi_n(z_0)\to 0$ $(n\to\infty)$，故 $\{\varphi_n\}$ 满足第三章 § 2 定理 4 的条件，从而在 $R$ 上广义一致收敛于 0．

任取 $z_0$ 的一个单连通邻域 $U$ 使得 $a\overline{\in}\bar{U}$．显然，对某个自然数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时 $\{a\}\cup\bar{U}\subset R_n$．将 $g(z,a)$、$g_n(z,a)$ 在区域 $U$ 的共轭调和函数分别记为 $v(z)$、$v_n(z)$ 并规范化为 $v(z_0)=v_n(z_0)=0$．因为同样是 $g-g_n$ 的共轭调和函数，所以 $v(z)-v_n(z)=H_n(z)$；而且，如果在 $U$ 上只考虑(多值)函数 $h(z)$、$h_n(z)$ 的一个单值分支(这样考虑的合理性由 $U$ 的单连通性和 $a\overline{\in}\bar{U}$ 所保证)，那么存在常数 $\alpha$、$\alpha_n$ 使得 $v=h+\alpha$、 $v_n=h_n+\alpha_n$， $n\geqslant N$．记

$$f_n(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_n-\alpha)}f_n^*(z)=\mathrm{e}^{-[g_n+\mathrm{i}\,(h_n+\alpha_n-\alpha)]}\quad(n\geqslant N), \tag{3}$$

则 $f_n$ 之定义中的 $h_n$ 不仅可去掉在 $\bar{U}$ 上的限制，并且仍可看成多值函数而不影响 $f_n$ 的单值性．根据 Riemann 映照定理，每个 $f_n$ 都

将 $R_n$ 一对一共形映上开单位圆盘. 显然关系

$$\left.\begin{aligned} e^{-\varphi_n} &= e^{-(G_n+iH_n)} = e^{-[(g-g_n)+i(h-h_n)]} \\ &= e^{-(g+ih)}e^{[g_n+i(h_n+a_n-a)]} = f(z)/f_n(z) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

在 $U$ 内恒成立. 注意到在 $R_n$ 上 $0<G_n(z)<\infty$, 而 $z=a$ 是 $f(z)$ 和 $f_n(z)$ 的唯一的零点、且为同阶零点, 故式(4)最左边和最右边的函数都是单值解析函数. 从而在 $R_n$ 上

$$e^{-(G_n+iH_n)} = f(z)/f_n(z) \tag{5}$$

恒成立. 于是在 $R_n$ 上

$$\begin{aligned} |f(z)-f_n(z)| &= |f_n(z)[f(z)/f_n(z)-1]| \\ &\leqslant |f(z)/f_n(z)-1| = |e^{-(G_n+iH_n)}-1| = |e^{-\varphi_n}-1|. \end{aligned}$$

由于 $\varphi_n$ 在 $R$ 上广义一致收敛于 0, 故 $f_n(z)$ 在 $R$ 上广义一致收敛于 $f(z)$. 于是, 由定理 1 可知 $f(z)$是一对一的. ▌

**定理** 7 (**Riemann 映照定理的一般形式**)　任一存在 Green 函数的单连通开 Riemann 曲面 $R$ 都可被共形映上开单位圆盘.

**证**　延用定理 6 的记号. 显然 $f$ 将 $R$ 共形映上 $\{w \mid |w|<1\}$ 的单连子区域 $R^*$. 若置 $K:=\{w \mid |w|\leqslant\infty\}$, 则 $K\backslash R^*$ 必为一连续统. 根据 Riemann 映照定理, 存在函数 $\zeta=\psi(w)$将 $R^*$ 一对一共形映上单位圆盘 $\{\zeta \mid |\zeta|<1\}$. 从而 $\psi\circ f$ 将 $R$ 共形映上单位圆盘 $\{\zeta \mid |\zeta|<1\}$. ▌

**注**　由第三章 § 4.3 可知 $f(z)$ 是满映照, 从而将 $R$ 一对一共形映上开单位圆盘. 也就是说, 在定理 7 的证明中, 函数 $\psi$ 可取为恒同映照.

连同 § 3 的定理 8 和定理 9, 可得著名的单值化定理:

**定理** 8 (**单值化定理**)　任一 Riemann 曲面的万有覆盖面必共形等价于一个球面、一个平面或一个开圆盘.

将满足定理 6 中三种情形的 Riemann 曲面分别称为是<u>椭圆型</u>、<u>抛物型</u>和<u>双曲型的</u>.

## §5　Riemann-Roch 定理

### 1.　带极点的位势函数

**定理 1**　设 $F$ 是一覆盖在复 $z$-球面上的闭或开的 Riemann 曲面. 设 $\zeta\in F$ 不是 $F$ 的支点，则存在 $F$ 上的函数列 $u^k=u^k(z,\zeta)$ 和 $v^k=v^k(z,\zeta)$ $(k=1,2\cdots)$ 满足条件(i)—(iii)：

(i) 除去 $\zeta$ 外，$u^k$ 和 $v^k$ 在 $F$ 内调和，且

$u^k$ 具有奇性：$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{(z-\zeta)^k}\right)=\dfrac{\cos k\theta}{r^k}$，而

$v^k$ 具有奇性：$\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{(z-\zeta)^k}\right)=-\dfrac{\sin k\theta}{r^k}$，　$z-\zeta=re^{i\theta}$.

(ii) 设 $\Omega$ 是 $F$ 的包含 $\zeta$ 的一单连紧致子曲面，其边界是解析 Jordan 曲线 $\Gamma$. 则 $u^k$ 和 $v^k$ 在 $F\backslash\Omega$ 上的 Dirichlet 积分为有限且

$$D_{F\backslash\Omega}[u^k]\leqslant\int_\Gamma u^k\frac{\partial u^k}{\partial v}\,\mathrm{d}s,\quad D_{F\backslash\Omega}[v^k]\leqslant\int_\Gamma v^k\frac{\partial v^k}{\partial v}\,\mathrm{d}s,$$

其中 $v$ 是 $\Gamma$ 关于 $\Omega$ 的内法向.

(iii) $u^k$ 和 $v^k$ 在 $F\backslash\Omega$ 上为有界，而且若在 $\Gamma$ 上 $|u^k|\leqslant M$，则在 $F\backslash\Omega$ 上也有 $|u^k|\leqslant M$. 关于 $v^k$ 类似的结论也成立.

**证**　与前面一样，不妨设 $F$ 是一开 Riemann 曲面. 设 $\zeta=0$，而 $U:=\overline{O(0,\rho)}$ 是包含在 $F$ 内的单叶闭圆盘. 对 $z$、$\zeta\in U$，置

$$\tilde{g}(z,\zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\chi(z,\zeta),\tag{1}$$

其中 $\chi(z,\zeta)$ 是 $U$ 内变量 $z$ 和 $\zeta$ 的调和函数. 记 $z=re^{i\theta}$，$\zeta=\xi+i\eta$，则

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right]_{\zeta=0}=\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\log\frac{1}{z-\zeta}\right]_{\zeta=0}=(k-1)!\frac{\cos k\theta}{r^k},$$

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right]_{\zeta=0}=-\operatorname{Im}\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\log\frac{1}{z-\zeta}\right]_{\zeta=0}=(k-1)!\frac{\sin k\theta}{r^k}.$$

因此，若置

$$\left.\begin{aligned}u^k&=u^k(z,0)=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^k},\\ v^k&=v^k(z,0)=-\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta},\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

其中$\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^k}=\left[\frac{\partial^k\tilde g(z,\zeta)}{\partial\xi^k}\right]_{\zeta=0}$，$\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}=\left[\frac{\partial^k\tilde g(z,\zeta)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\right]_{\zeta=0}$，则根据式(1)，$u^k$和$v^k$满足条件(i).

设$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$是$F$的一穷尽，$F_n$的边界为$\Gamma_n$且$z=0\in F_0$. 又设$g_n(z,\zeta)=g_n(z,\xi,\eta)$ $(\zeta=\xi+i\eta)$是$F_n$的Grenn函数. 对$\delta>0$，置

$$\left.\begin{aligned}\Delta^k g_n&=\Delta^k g_n(z;0,0)=g_n(z;k\delta,0)-C_k^1 g_n[z;(k-1)\delta,0]\\ &+C_k^2 g_n[z;(k-2)\delta,0]-\cdots\pm g_n(z;0,0),\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\Delta_1^k g_n=\Delta_1^k g_n(z;0,0)=\Delta^{k-1}g_n(z;0,\delta)-\Delta^{k-1}g_n(z;0,0).\qquad(4)$$

$$u_n^k=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\Delta^k g_n}{\delta^k},\quad v_n^k=\frac{-1}{(k-1)!}\frac{\Delta_1^k g_n}{\delta^k}.\qquad(5)$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\to0}u_n^k=\frac{1}{(k-1)!}\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^k}=u^k(z,0),\qquad(6)$$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\to0}v_n^k=\frac{-1}{(k-1)!}\frac{\partial^k\tilde g(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}=v^k(z,0).\qquad(6^*)$$

由于在$\Gamma_n$上$u_n^k=0$,则

$$D_{F_m\setminus\omega}[u_n^k]\leqslant D_{F_n\setminus\omega}[u_n^k]\leqslant\int_{\Gamma}u_n^k\frac{\partial u_n^k}{\partial\nu}\,ds\ (m\leqslant n).$$

所以，若相继令$\delta\to0$，$n\to\infty$，$m\to\infty$可得

$$D_{F\setminus\omega}[u^k]\leqslant\int_{\Gamma}u^k\frac{\partial u^k}{\partial\nu}\,ds.\qquad(7)$$

类似可得

$$D_{F\setminus\omega}[v^k]\leqslant\int_{\Gamma}v^k\frac{\partial v^k}{\partial\nu}\,ds.\qquad(7^*)$$

最后，类似于§3定理5的证明可得(iii). ▌

**定理 2**　设 $F$ 是一覆盖在复 $z$-球面上的闭或开的 Riemann 曲面. 设 $F_0:=\overline{O(0,\rho_0)}$、$F_1:=\overline{O(0,\rho_1)}$ ($\rho_0<\rho_1$) 是包含在 $F$ 内的两个同心闭圆盘. 又设函数

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}\quad (c_k=a_k+ib_k)$$

在 $\{z\,|\,\rho_0\leqslant|z|\leqslant\rho_1\}$ 正则. 置

$$U(z)=\mathbf{Re}(f(z))=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta}{r_k},\quad z=re^{i\theta}.$$

则

(i) 存在 $F\backslash F_0$ 的调和函数 $u(z)$, 可被调和延拓进 $F_0$ 且使

$$V(z):=u(z)-U(z)$$

在 $F_0$ 内调和.

(ii) 设 $\Omega$ 是 $F$ 的包含 $F_0$ 的一单连紧致子曲面,其边界是解析 Jordan 曲线 $\Gamma$. 则 $u$ 在 $F\backslash\Omega$ 上的 Dirichlet 积分为有限且

$$D_{F\backslash\Omega}[u]\leqslant\int_{\Gamma}u\frac{\partial u}{\partial v}\,ds,$$

其中 $v$ 是 $\Gamma$ 关于 $\Omega$ 的内法向.

(iii) $u$ 在 $F\backslash\Omega$ 上为有界,而且若在 $\Gamma$ 上 $|u|\leqslant M$, 则在 $F\backslash\Omega$ 上也有 $|u|\leqslant M$.

**证**　与前面 §3 相同, 不妨设 $F$ 是一开 Riemann 曲面. 设 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $F$ 的一穷尽, 其中每个 $F_n$ 的边界为 $\Gamma_n$.

(i) 对 $z$、$\zeta\in F_1$, 置

$$\tilde{g}(z,\zeta)=\log\frac{1}{|z-\zeta|}+\chi(z,\zeta),\quad z=re^{i\theta},\ \zeta=\xi+i\eta,$$

则

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right]_{\zeta=0}=(k-1)!\ \frac{\cos k\theta}{r^k},$$

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\log\frac{1}{|z-\zeta|}\right]_{\zeta=0}=(k-1)!\ \frac{\sin k\theta}{r^k}.$$

因此, 若置

$$u(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(a_k\frac{\partial^k\tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^k}+b_k\frac{\partial^k\tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\right),\tag{1}$$

$$V(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(a_k\frac{\partial^k\chi(z,0)}{\partial\xi^k}+b_k\frac{\partial^k\chi(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\right),\tag{2}$$

则
$$u(z)=U(z)+V(z).\tag{3}$$

设对于任意 $z、\zeta\in F_1$，$|\chi(z,\zeta)|\leqslant K(=\text{const.})$. 固定 $z\in F_1$，将 $\chi(z,\zeta)$ 考虑做 $\zeta$ 的调和函数并置

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi(z,\rho_1e^{i\varphi})\frac{\rho_1e^{i\varphi}+\zeta}{\rho_1e^{i\varphi}-\zeta}d\varphi,$$

则 $\chi(z,\zeta)=\mathbf{Re}\,(F(\zeta))$. 所以

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^k\chi(z,0)}{\partial\xi^k}\right|\leqslant|F^{(k)}(0)|\leqslant\frac{k!M}{\rho_1^k},\\&\left|\frac{\partial^k\chi(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\right|\leqslant|F^{(k)}(0)|\leqslant\frac{k!M}{\rho_1^k}\quad(M=\text{const.}).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由于 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k}$ 在 $\{z\,|\,\rho_0\leqslant|z|\leqslant\rho_1\}$ 正则，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(|a_k|+|b_k|)}{\rho_0^k}<\infty,\ \text{故}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(|a_k|+|b_k|)}{\rho_1^k}<\infty.\tag{5}$$

所以由(4)可知 $V(z)$ 在 $\overline{O(0,\rho_1)}$ 上一致收敛，从而

$$u(z)-U(z)=V(z)\tag{6}$$

在 $O(0,\rho_1)$ 内调和.

设 $\Omega_1$ 是位于 $\overline{O(0,\rho)}$ $(\rho_0<\rho<\rho_1)$ 外的 $F$ 的一紧子曲面，则

$$|\tilde{g}(z,\zeta)|\leqslant K(\Omega_1)\quad\forall z\in\Omega_1,\forall\zeta\in F_0.$$

所以类似于(4)有常数 $M^*$ 使得

$$\left|\frac{\partial^k\tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^k}\right|\leqslant\frac{k!M^*}{\rho_0^k},\quad\left|\frac{\partial^k\tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\right|\leqslant\frac{k!M^*}{\rho_0^k}.\tag{7}$$

由(5)和(7)可知 $u(z)$ 关于 $z\in\Omega_1$ 一致收敛，故 $u(z)$ 在 $\Omega_1$ 内调和. 又由于 $\Omega_1$ 是任意的，根据(6)，$u(z)$ 在 $F\backslash F_0$ 内调和.

(ii) 设 $\Delta^kg_n$、$\Delta_1^kg_n$ 的定义与前面相同，并置

$$u_n^N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!}\left(a_k \frac{\Delta^k g_n}{\delta^k} + b_k \frac{\Delta_1^k g_n}{\delta^k}\right)\ (\delta > 0). \tag{8}$$

由于在 $\Gamma_n$ 上 $u_n^N=0$，则

$$D_{F_m\setminus\omega}[u_n^N] \leqslant D_{F_n\setminus\omega}[u_n^N] = \int_{\Gamma} u_n^N \frac{\partial u_n^N}{\partial v}\,\mathrm{d}s\ (m \leqslant n).$$

所以，相继令 $\delta\to 0$，$N\to\infty$，$n\to\infty$，$m\to\infty$ 可得

$$D_{F\setminus\omega}[u] \leqslant \int_{\Gamma} u\frac{\partial u}{\partial v}\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

类似于 § 3 定理 5 的证明可证得(iii). ▌

## 2. 互反关系

(i) 设 $u^k(z,\zeta)$、$v^k(z,\zeta)$ 是定理 1 中的位势函数. 又设 $\tau_\zeta^k(z)$、$\tilde{\tau}_\zeta^k(z)$ 皆是解析函数，其实部分别为

$$(k-1)!\ u^k(z,\zeta)、\quad (k-1)!\ v^k(z,\zeta).$$

若记其虚部为 $v(z)$，则有

$$\tau_\zeta^k(z) = \frac{\partial^k \tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^k} + \mathrm{i}\,v(z) = \frac{(k-1)!}{(z-\zeta)^k} + \cdots, \tag{1}$$

$$\tilde{\tau}_\zeta^k(z) = \frac{\partial^k \tilde{g}(z,0)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta} + \mathrm{i}\,v(z) = \frac{(k-1)!}{i(z-\zeta)^k} + \cdots. \tag{2}$$

(ii) 同样不妨设 $F$ 是开 Riemann 曲面，而 $\alpha$ 是 $F$ 上一条有方向的解析 Jordan 曲线，它既不过 $F$ 的支点也不将 $F$ 分成两部分.

设 $\alpha$ 的正法向 $v$ 如 § 3 定理 6 中所定义. 置

$$\omega_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha \frac{\partial \tilde{g}(z,\zeta)}{\partial v_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|. \tag{3}$$

根据定 § 3 定理 6，$\omega_\alpha(z)$ 是 $F\setminus\alpha$ 上的单值调和函数，且

$$\omega_\alpha(\dot{z}) - \omega_\alpha(\bar{z}) = 1,\quad \forall\, z\in\alpha. \tag{4}$$

因此 $\omega_\alpha$ 可被越过 $\alpha$ 延拓成 $F$ 上的无限多值的调和函数.

设 $w_\alpha$ 是实部为 $\omega_\alpha$ 的解析函数. 若记其虚部为 $v(z)$，则

$$w_a(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a \frac{\partial \tilde{g}(z,\zeta)}{\partial v_\zeta}|\mathrm{d}\zeta| + \mathrm{i}v(z). \tag{5}$$

(iii) 对于固定的 $z$，设 $\tilde{g}_z(\zeta)$ 是实部为 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 的关于变量 $\zeta$ 的解析函数. 若记其虚部为 $v(z)$，则

$$\tilde{g}_z(\zeta) = \tilde{g}(z,\zeta) + \mathrm{i}v(z). \tag{6}$$

(iv) 设 $z_0(\neq\zeta)$ 是 $F$ 的一固定点. 将 $z_0$ 与 $z(\neq\zeta)$ 用一解析 Jordan 弧 $C$ 连接，使得 $C$ 即不通过 $\zeta$ 也不通过 $F$ 的支点. 置

$$\tilde{h}(z,\zeta) = \int_C \frac{\partial \tilde{g}(t,\zeta)}{\partial v_t}|\mathrm{d}t| = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \tilde{g}(t,\zeta)}{\partial v_t}|\mathrm{d}t|. \tag{7}$$

对于固定的 $z$，设 $\tilde{h}_z(\zeta)$ 是实部为 $\tilde{h}(z,\zeta)$ 的关于变量 $\zeta$ 的解析函数. 若记其虚部为 $v(\zeta)$，则

$$\tilde{h}_z(\zeta) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \tilde{g}(t,\zeta)}{\partial v_t}|\mathrm{d}t| + \mathrm{i}v(\zeta). \tag{8}$$

根据上述个式，下面的互反关系成立.

**定理 3** （互反关系）

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right) = \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right), \quad \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right) = \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\ddot{\tau}_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right),\\ &\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\ddot{\tau}_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right) = \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right), \quad \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^l\ddot{\tau}_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right) = \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\ddot{\tau}_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}z^l}\right).\end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

$$\int_a \mathrm{d}\tau_z^k(\zeta) = 2\pi\mathrm{i}\ \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right), \int_a \mathrm{d}\ddot{\tau}_z^k(\zeta) = 2\pi\mathrm{i}\ \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right), \quad \text{(II)}$$

$$\mathbf{Re}(\tau_\zeta^k(z)) = \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{g}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right), \mathbf{Re}(\ddot{\tau}_\zeta^k(z)) = \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{g}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right). \quad \text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{Im}(\tau_\zeta^k(z)) - \mathbf{Im}(\tau_\zeta^k(z_0)) = \int_{z_0}^{z}\mathrm{d}\mathbf{Im}(\tau_\zeta^k(t)) = \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{h}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right),\\ &\mathbf{Im}(\ddot{\tau}_\zeta^k(z)) - \mathbf{Im}(\ddot{\tau}_\zeta^k(z_0)) = \int_{z_0}^{z}\mathrm{d}\mathbf{Im}(\ddot{\tau}_\zeta^k(t)) - \mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{h}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right).\end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

**证**　(i) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，$\zeta - \xi + \mathrm{i}\eta$，则根据(1)，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right)=\frac{\partial^{l+k}\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial x^l\partial\xi^k},\quad \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right)=\frac{\partial^{l+k}\tilde{g}(\zeta,z)}{\partial\xi^k\partial x^l}.$$

由于 $\tilde{g}(z,\zeta)=\tilde{g}(\zeta,z)$，故

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right).\tag{I$_1$}$$

若置 $u(z)=\dfrac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\xi^k}$，则 $\tau_\zeta^k(z)=u(z)+\mathrm{i}\,v(z)$．由 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 可得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_\zeta^k(z)}{\mathrm{d}z^l}\right)&=\frac{\partial v}{\partial x^l}=-\frac{\partial u}{\partial x^{l-1}\partial y}\\&=-\frac{\partial^{l+k}\tilde{g}(\zeta,z)}{\partial\xi^k\partial x^{l-1}\partial y}=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{\tau}_z^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right).\end{aligned}\right\}\tag{I$_2$}$$

式(I)中的其他两式可类似证得.

(ii) 根据式(5)，由 $\dfrac{\partial g(\zeta,z)}{\partial x^k}=\mathrm{Re}(\tau_z^k(\zeta))$ 可得

$$\begin{aligned}2\pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right)&=\int_a\frac{\partial}{\partial v_\zeta}\left(\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial x^k}\right)|\mathrm{d}\zeta|\\&=\int_a\frac{\partial}{\partial v_\zeta}\left(\frac{\partial\tilde{g}(\zeta,z)}{\partial x^k}\right)|\mathrm{d}\zeta|=\int_a\mathrm{d}\;\mathrm{Im}\tau_z^k(\zeta).\end{aligned}$$

又因 $\mathrm{Re}(\tau_z^k(\zeta))$ 在 $F$ 上单值，故 $\displaystyle\int_a\mathrm{d}\mathrm{Re}(\tau_z^k(\zeta))=0$．所以

$$2\pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right)=-\mathrm{i}\int_a\mathrm{d}\;\tau_z^k(\zeta).$$

因此

$$\int_a\mathrm{d}\;\tau_z^k(\zeta)=2\pi\mathrm{i}\;\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right).\tag{II$_1$}$$

若记 $u(z)=\displaystyle\int_a\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial v_\zeta}|\mathrm{d}\zeta|$，则由 $2\pi\,w_a(z)=u(z)+\mathrm{i}\,v$ 得

$$\begin{aligned}2\pi\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right)&=\frac{\partial v}{\partial x^k}=-\frac{\partial u}{\partial x^{k-1}\partial y}=-\int_a\frac{\partial}{\partial v_\zeta}\left(\frac{\partial\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial x^{k-1}\partial y}\right)|\mathrm{d}\zeta|\\&=\int_a\frac{\partial}{\partial v_\zeta}\mathrm{Re}(\tilde{\tau}_z^k(\zeta))|\mathrm{d}\zeta|=-\mathrm{i}\int_a\mathrm{d}\tilde{\tau}_z^k(\zeta).\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_a\mathrm{d}\tilde{\tau}_z^k(\zeta)=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_a(z)}{\mathrm{d}z^k}\right).\tag{II$_2$}$$

(iii) 由于 $\tilde{g}_z(\zeta)=\tilde{g}(z,\zeta)+\mathrm{i}v=u+\mathrm{i}v$，故

$$\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{g}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right)=\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}=\frac{\partial^k\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\xi^k}=\mathbf{Re}(\tau_z^k(\zeta)), \tag{III$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{g}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right)&=\frac{\partial^k v}{\partial\xi^k}=-\frac{\partial^k u}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}\\&=-\frac{\partial^k\tilde{g}(z,\zeta)}{\partial\xi^{k-1}\partial\eta}=\mathbf{Re}(\tilde{\tau}_z^k(\zeta)).\end{aligned}\right\} \tag{III$_2$}$$

$$\tilde{h}_z(\zeta)=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial\tilde{g}(t,\zeta)}{\partial\nu_t}|\mathrm{d}t|+\mathrm{i}v(\zeta)=u+\mathrm{i}v,$$

所以

$$\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{h}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right)=\frac{\partial^k u}{\partial\xi_k}=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial\nu_t}\left(\frac{\partial^k\tilde{g}(t,\zeta)}{\partial\xi^k}\right)|\mathrm{d}t|=\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}\mathbf{Im}(\tau_\zeta^k(t)). \tag{IV$_1$}$$

类似可得
$$\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{h}_z(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^k}\right)=\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}\mathbf{Im}(\tilde{\tau}_\zeta^k(t)). \ \blacksquare \tag{IV$_2$}$$

**注** 若 $F$ 是闭 Riemann 曲面，只要从 $F$ 上移去一点 $\zeta_0$，并在开 Riemann 曲面 $F\backslash\{\zeta_0\}$ 上构造 $\tilde{g}(z,\zeta)$，则 $\tau_\zeta^k(z)$、$\tilde{\tau}_\zeta^k(z)$和 $w_a(z)$ 在 $\zeta_0$ 处都是正则的；而且 $\tilde{g}_\zeta(z)$ 和 $\tilde{h}_\zeta(z)$ 分别在 $\zeta$ 和 $\zeta_0$ 具有对数奇性（§3 定理 3）. 因此，$w_a(z)$ 是第一类 Abel 积分、$\tau_\zeta^k(z)$ 和 $\tilde{\tau}_\zeta^k(z)$ 都是第二类 Abel 积分，而 $\tilde{g}_\zeta(z)$ 和 $\tilde{h}_\zeta(z)$ 都是第三类 Abel 积分.

### 3. 因子式

设 $\delta(z)$ 是 Riemann 曲面 $R$ 上的单值半纯函数，有限集 $\{\zeta_\nu\}_{\nu=1}^{r}$ 和 $\{z_\mu\}_{\mu=1}^{s}$ 分别是 $\delta(z)$ 的零点全体和极点全体，其中每个 $\zeta_\nu$ 是 $\delta(z)$ 的 $m_\nu(>0)$ 阶零点，每个 $z_\mu$ 是 $\delta(z)$ 的 $n_\mu(>0)$ 阶极点，则称 $\delta(z)$ 为 $R$ 上的<u>因子式</u>（或<u>除式</u>）. 为方便，记作

$$\delta=\delta(z)=\prod_{\nu=1}^{r}q^{m_\nu}(\zeta_\nu)\Big/\prod_{\mu=1}^{s}q^{n_\mu}(z_\mu).$$

记 $\mathrm{ord}(\delta)=\sum_{\nu=1}^{r}m_\nu-\sum_{\mu=1}^{s}n_\mu$，称之为 $\delta(z)$ 的<u>阶</u>.

设 $f(z)$ 是 $R$ 上的单值半纯函数. 如果除有限点 $\{\zeta_v\}_{v=1}^r$ 和 $\{z_\mu\}_{\mu=1}^s$ 外 $f(z)$ 在 $R$ 上正则, 且其中每个 $z_\mu$ 是 $f(z)$ 的阶数 $\geqslant n_\mu$ 的零点 、每个 $\zeta_v$ 是 $f(z)$ 的阶数 $\leqslant m_v$ 的极点, 形象地说, 即 $\delta f(z)$ 在 $R$ 上正则, 那么说 $f(z)$ 是 $1/\delta$ 的倍式.

若 $R$ 上的微分 $dv$ 除有限点 $\{\zeta_v\}_{v=1}^r$ 和 $\{z_\mu\}_{\mu=1}^s$ 外在 $R$ 上正则、而且每个 $\zeta_v$ 是 $dv$ 的阶数 $\geqslant m_v$ 的零点 、每个 $z_\mu$ 是 $dv$ 的阶数 $\leqslant n_\mu$ 的极点, 形象地说, 即 $dv/\delta$ 在 $R$ 上正则, 则说 $dv$ 是 $\delta$ 的倍式.

## 4. Riemann-Roch 定理

**定理 4** 设紧 Riemann 曲面 $R$ 是复 $z$-球面 $K$ 的复盖面, 其亏格 $p\geqslant 1$. 又设

$$\delta=\delta(z)=\prod_{v=1}^{r} q^{m_v}(\zeta_v)\Big/\prod_{\mu=1}^{s} q^{n_\mu}(z_\mu),$$

$$\operatorname{ord}(\delta)_z=\sum_{v=1}^{r} m_v-\sum_{\mu=1}^{s} n_\mu$$

是 $R$ 上的一个因子式. 如果将 $R$ 上的线性独立的 $\delta$ 之倍式的微分 $dv=\varphi(z)dz$ (在复域的意义下)的个数记为 $D(\delta)$, 而将 $R$ 上的线性独立的 $1/\delta$ 之倍式的单值半纯函数 (在复域的意义下)的个数记为 $A(1/\delta)$, 那么

$$A(1/\delta)=D(\delta)+[\operatorname{ord}(\delta)+1-p].$$

**证** 为方便起见, 不妨设 $\{\zeta_v\}_{v=1}^r$ 和 $\{z_\mu\}_{\mu=1}^s$ 既不包含 $R$ 的任何支点, 也不覆盖点 $\infty$.

设 $\zeta_0\in R$ 既非 $R$ 的支点, 也非 $\{\zeta_v\}_{v=1}^r$ 和 $\{z_\mu\}_{\mu=1}^s$ 中之点. 从 $R$ 中移去 $\zeta_0$, 并设 $\tilde{g}(z,\zeta)$ 是 $R\setminus\{\zeta_0\}$ 上的、§ 3 定理 3 中所述的在 $\zeta_0$ 具有对数奇性 $-\log\dfrac{1}{|z-\zeta_0|}$ 的调和函数.

设 $C_i\ (i=1,2,\cdots,p)$ 是 $F$ 上的对应于亏格 $p$ 的(可将 $F$ 割裂成为平面型的) $p$ 条环割线. 又设 $C_i^*\ (i=1,2,\cdots,p)$ 是对应于 $C_i$ 的 $p$ 条共轭环割线, 使得 $C_i$ 与 $C_i^*$ 只相交于一点且 $C_i$ 与 $C_k$、$C_k^*$

$(i\neq k)$ 都不相交. 用记号 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2p}$ 依次代替 $C_1,\cdots C_p,C^*,\cdots,C_p^*$. 可选取 $\{\alpha_h\}$ 使其不包含 $F$ 的支点及 $\{\zeta_v\}$、$\{z_\mu\}$ 中之点.

设 $F_0$ 是 $F$ 经 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2p}$ 割裂后所得的曲面, 则 $F_0$ 是单连通的, 且定理 3 中所定义的解析函数在其上都是单值的. 下列所涉及的 $\tau_\zeta^k(z)$ 等函数都理解为它们在 $F_0$ 上的单值分支. 记

$$w_{\alpha_h}(z)=w_h(z)\ (h=1,2,\cdots,2p).$$

设 $f(z)$ 是 $F$ 上的 $1/\delta$ 之倍式的单值半纯函数, 则 $f(z)$ 可表示成下述形式: 对任意 $z\in F_0$,

$$f(z)=\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\tau_{\zeta_v}^k(z)+\beta_k^v\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z)\right]+(a+ib),\ z\in F_0,\quad(1)$$

其中 $\alpha_k^v$、$\beta_k^v$、$a$、$b$ 是适当的实值常数.

由于 $f(z)$ 在 $F$ 是单值的, 故 $\int_{\alpha_h}\mathrm{d}f(z)=0$. 则由(II)可得

$$\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^kw_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^kw_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0\qquad(2)$$

$$(h=1,2,\cdots,2p).$$

由于 $f(z)$ 是 $\prod_{\mu=1}^{s}q^{n_\mu}(z_\mu)$ 的倍式, 故

$$f(z_\mu)=0,\ f'(z_\mu)=0,\cdots,f^{(n_\mu-1)}(z_\mu)=0.$$

所以由(1)得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}(\tau_{\zeta_v}^k(z_\mu))+\beta_k^v\mathrm{Re}(\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z_\mu))\right]+a=0\\&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Im}(\tau_{\zeta_v}^k(z_\mu))+\beta_k^v\mathrm{Im}(\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z_\mu))\right]+b=0\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$(\mu=1,2,\cdots,s)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_{\zeta_v}^k(z_\mu)}{\mathrm{d}z_\mu^l}\right)+\beta_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z_\mu)}{\mathrm{d}z_\mu^l}\right)\right]=0,\\&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tau_{\zeta_v}^k(z_\mu)}{\mathrm{d}z_\mu^l}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^l\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z_\mu)}{\mathrm{d}z_\mu^l}\right)\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$(l=1,2,\cdots,n_\mu-1)$$

如果将 $\tau_{\zeta_v}^k(z)$、$\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z)$ 规范化使对不属 $\{\zeta_0,\zeta_1,\cdots,\zeta_r,z_1,\cdots,z_s\}$ 的某一点 $z_0$ 有 $\tau_{\zeta_v}^k(z_0)=0$、$\tilde{\tau}_{\zeta_v}^k(z_0)=0$，那么根据互反关系，式(2)、(3)和(4)可写成下列式(2)、(3′)和(4′)：

$$\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0.\tag{2}$$

$$(h=1,2,\cdots,2p)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{g}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{g}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]+a=0,\\&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{h}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{h}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]+b=0.\end{aligned}\right\}\tag{3′}$$

$$(\mu=1,2,\cdots,s)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0,\\&\sum_{v=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_v}\left[\alpha_k^v\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{\tau}_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\beta_k^v\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tilde{\tau}_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{4′}$$

$$(\mu=1,2,\cdots,s;\ l=1,2,\cdots,n_\mu-1)$$

式(2)、(3′)和(4′)组成关于 $2\left(\sum_{v=1}^{r}m_v+1\right)$ 个未知变量 $\alpha_k^v$、$\beta_k^v$、$a$、$b$ $(v=1,2,\cdots,r,k=1,2,\cdots,m_v)$ 的齐次线性方程组.

设 $P$ 是上述方程组的系数矩阵 $A$ 的秩，则方程组有

$$N=2\left(\sum_{v=1}^{r}m_v+1\right)-P\tag{5}$$

个线性独立的解(在实的意义下).

$N$ 即为 $R$ 上的 $1/\delta$ 之倍式的(在实的意义下)线性独立的单值半纯函数的个数.

设 $A'$ 是矩阵 $A$ 的转置矩阵,则 $A'$ 的秩为 $P$. 因此下面的式子(7)、(8)和(9)组成一个齐次线性方程组,其未知变量为 $a_h$ $(h=1,2,\cdots,2p)$、$b_\mu$、$\mathring{b}_\mu$、$c^l_\mu$、$\mathring{c}^l_\mu$ $(\mu=1,2,\cdots,s;\ l=1,2,\cdots,n_\mu-1)$ ,共计 $2\left(\sum\limits_{\mu=1}^{s}n_\mu+p\right)$ 个;其系数矩阵为 $A'$. 该方程组有

$$M:=2\left(\sum_{\mu=1}^{s}n_\mu+p\right)-P \tag{6}$$

个线性独立的解(在实的意义下).

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{2p}a_h\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\left[b_\mu\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{g}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\mathring{b}_\mu\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{h}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_\mu-1}\left[c^l_\mu\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau^l_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\mathring{c}^l_\mu\mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}^k\mathring{\tau}^l_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{2p}a_h\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k w_h(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\left[b_\mu\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{g}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\mathring{b}_\mu\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\bar{h}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_\mu-1}\left[c^l_\mu\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\tau^l_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)+\mathring{c}^l_\mu\mathbf{Im}\left(\frac{\mathrm{d}^k\mathring{\tau}^l_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right)\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$(v=1,2,\cdots,r,\ k=1,2,\cdots,m_v)$$

$$\sum_{\mu=1}^{s}b_\mu=0,\qquad\sum_{\mu=1}^{s}\mathring{b}_\mu=0.\tag{9}$$

由(7)和(8)可得

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2p}a_k\frac{\mathrm{d}^k w_k(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}+\sum_{\mu=1}^{s}\left[b_\mu\frac{\mathrm{d}^k\tilde{g}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}+\dot{b}_\mu\frac{\mathrm{d}^k\tilde{h}_{z_\mu}(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right]\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_\mu-1}\left[c_\mu^l\frac{\mathrm{d}^k\tau_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}+\dot{c}_\mu^l\frac{\mathrm{d}^k\dot{\tau}_{z_\mu}^l(\zeta_v)}{\mathrm{d}\zeta_v^k}\right]=0.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

$(v=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,m_v).$

若置

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\zeta)=&\sum_{k=1}^{2p}a_k\frac{\mathrm{d}w_k(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}+\sum_{\mu=1}^{s}\left[b_\mu\frac{\mathrm{d}\tilde{g}_{z_\mu}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}+\dot{b}_\mu\frac{\mathrm{d}\tilde{h}_{z_\mu}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right]\\&+\sum_{\mu=1}^{s}\sum_{l=1}^{n_\mu-1}\left[c_\mu^l\frac{\mathrm{d}\tau_{z_\mu}^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}+\dot{c}_\mu^l\frac{\mathrm{d}\dot{\tau}_{z_\mu}^l(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right],\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

则 $\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是一微分，而 $\varphi(\zeta)$ 以 $z_\mu$ 为阶数 $\leqslant n_\mu$ 的极点.

以 $\zeta=\zeta_0$ 为例外点，$\tau_{z_\mu}(\zeta)$、$\dot{\tau}_{z_\mu}(\zeta)$ 是正则的，而 $\tilde{g}_{z_\mu}(\zeta)$ 具有极性 $-\log\dfrac{1}{\zeta-\zeta_0}$. 由此可见 $\tilde{h}_{z_\mu}(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 处是正则的且在 $\zeta=z_0$ 处具有极性 $\frac{1}{\mathrm{i}}\log(\zeta-z_0)$. 但由式(9)可知 $\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta_0$、$z_0$ 处的极性为可去的，则 $\varphi(\zeta)$ 在 $\zeta_0$、$z_0$ 处是正则的. 于是由(10)可得

$$\varphi(\zeta_v)=0,\ \varphi'(\zeta_v)=0,\ \cdots,\varphi^{(m_v-1)}(\zeta_v)=0\ (v=1,2,\cdots,r).$$

所以 $\zeta_v$ 是 $\varphi(\zeta)$ 的阶数 $\geqslant m_v$ 的零点 $(v=1,2,\cdots,r)$. 因此

$$\mathrm{d}v=\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta\tag{12}$$

是一 $\delta$ 之倍式的微分.

反之，若 $\mathrm{d}v=\varphi(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 是 $1\Big/\prod_{\mu=1}^{s}q^{n_\mu}(z_\mu)$ 的倍式，则 $\varphi(\zeta)$ 具有式(11)的形式，从而 $M$ 是 $\delta$ 之倍式的(在实的意义下)线性独立的微分的个数. 由(5)和(6)可得

$$\left.\begin{aligned} N &= M + 2(m+1-p), \\ m &= \sum_{\nu=1}^{r} m_\nu - \sum_{\mu=1}^{s} n_\mu = \operatorname{ord}(\delta). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

下面证明

$$N = 2A(1/\delta), \quad M = 2D(\delta). \tag{14}$$

设 $w_1,\cdots,w_k\,(k=A(1/\delta))$ 是 $R$ 上的 $1/\delta$ 之倍式的(在复的意义下)线性独立的单值半纯函数,则 $w_1,\cdots,w_k,iw_1,\cdots,iw_k$ 是 $R$ 上的 $1/\delta$ 之倍式的(在实的意义下)线性独立的单值半纯函数. 因此

$$2k \leqslant N.$$

另一方面, $R$ 上的任一 $1/\delta$ 之倍式的单值半纯函数可被表示成 $w_1,\cdots,w_k,\mathrm{i}\,w_1,\cdots,\mathrm{i}\,w_k$ 的实系数线性组合,故

$$N \leqslant 2k.$$

因此 $N=2k=2A(1/\delta)$. 类似可得 $M=2D(\delta)$. 故由(13)有

$$A(1/\delta) = D(\delta) + (m+1-p). \quad \blacksquare$$

若 $\delta = \prod_{\nu=1}^{p+1} q(\zeta_\nu)$ ,则 $\operatorname{ord}(\delta)=p+1$, 故 $A(1/\delta)\geqslant 2$. 即得

**定理 5** 设紧 Riemann 曲面 $R$ 是复 $z$-球面的覆盖面, 其亏格为亏格为 $p\geqslant 1$. 对 $R$ 上任意给定的 $p+1$ 个点 $\{\zeta_\nu\}_{\nu=1}^{p+1}$, 存在 $R$ 上的非常数单值半纯函数 $w=f(z)$ 使得除去在每一点 $\zeta_\nu$ 最多为单重极点外在 $R$ 上是正则的.

从定理 5 可知任一亏格为 $p\geqslant 1$ 的紧 Riemann 曲面存在非常数单值半纯函数. 至于开 Riemann 曲面上非常数单值半纯函数的存在性是由 Behnke,H. 和 Stein,K. 于 1948 年给出. 本书将在第六章 § 2 证明之.

# 第六章

# 非紧 Riemann 曲面的延拓

## §1　Fuchs 群

### 1.　真不连续群

复变数 $z$ 与 $z'$ 的线性分式变换

$$z \longmapsto z' = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

称为线性变换，简记作 $S$，其中 $a$、$b$、$c$、$d$ 都是常数，$ad-bc\neq 0$.

对于两个线性变换 $S$、$T$，定义它们的乘积 $ST$ 为变换

$$z \longmapsto z'' = S(z') = S[T(z)].$$

一般说来，乘积是不可交换的，即 $ST\neq TS$. 变换

$$z' \longmapsto z = \frac{-dz'+b}{cz'-a}, \tag{2}$$

称为 $S$ 的逆变换，简记作 $S^{-1}$.

设 $\mathscr{G}$ 是有限或无限个线性变换组成的集合. 如果

1) $\mathscr{G}$ 中每个变换的逆变换也属于 $\mathscr{G}$；且

2) $\mathscr{G}$ 中任两个变换的乘积也属于 $\mathscr{G}$，

那么称 $\mathscr{G}$ 为线性变换群. 注意到 $\mathscr{G}$ 中的恒等变换 $I$ 是其幺元.

设 $\Sigma$ 是变换群 $\mathscr{G}$ 的不变域. 对 $\Sigma$ 上的任一图形 $D$，经变换

$T\in\mathscr{G}$ 而得的图形 $T(D)$ 称为 $D$ 关于群 $\mathscr{G}$ 的等价图形. 特别，当 $D$ 是单点时，等价图形称为等价点.

又，若存在一点 $z_0\in\Sigma$ 及一邻域 $V(z_0)$ 使得对任意 $T\in\mathscr{G}\backslash\{I\}$ 都有 $T(z_0)\overline{\in}V(z_0)$，则称 $\mathscr{G}$ 为真不连续群.

设 $\Omega$ 是 $\Sigma$ 的一子区域(连通或不连通的). 如果

a) $\Omega$ 中任两点关于 $\mathscr{G}$ 都非等价点；且

b) $\Omega$ 的每一边界点的充分小邻域内都有 $\Omega$ 之内点的等价点，

那么称 $\Omega$ 为真不连续群 $\mathscr{G}$ 的基本区.

真不连续群 $\mathscr{G}$ 的基本区是存在的，此处只大略描述之(第 3 段将具体讨论 Fuchs 群的基本区). 事实上，由定义可知存在区域 $V(z_0)$ 使得对任意 $T\in\mathscr{G}\backslash\{I\}$ 都有 $T(V(z_0))\cap V(z_0)=\varnothing$. 将 $V(z_0)$ 尽量扩大并保持性质 a) 和 b)，最终至不能再扩大为止. 此最终区域 $W(z_0)$ 即为基本区. 基本区的等价图形仍为基本区，且互不重叠. 从而真不连续群的群元成一可数集.

## 2. 单位圆盘上的非欧度量

线性变换

$$S(z)=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\quad(|a|^2-|b|^2=1)\tag{1}$$

是将开单位圆盘 $U:=\{z\,|\,|z|<1\}$ 共形映为自身的变换. 若记

$$\left.\begin{aligned}&z_0=-\frac{b}{a},\quad e^{i\theta}=\frac{a}{\bar{a}};\quad 则\\&a=\frac{e^{i\theta/2}}{\sqrt{1-|z_0|^2}},\quad b=\frac{-z_0e^{i\theta/2}}{\sqrt{1-|z_0|^2}},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

于是变换(1)化为习惯表达式：

$$S(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\quad(|z_0|<1;\ \theta\ 为实数).\tag{3}$$

如果记 $w=S(z)$，那么对于任意两点 $z_1$、$z_2\in U$ 必有

$$w_1 - w_2 = \frac{z_1 - z_2}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})},$$

$$1 - \overline{w}_1 w_2 = \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{(b\bar{z}_1 + a)(\bar{b}z_2 + \bar{a})}.$$

因此
$$\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = \left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w}_1 w_2}\right|. \tag{4}$$

于是
$$\delta(\alpha,\beta) := \left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right|, \qquad \forall\ \alpha、\beta \in U \tag{5}$$

在线性变换 $S$ 下保持不变，即 $\delta(S(\alpha),S(\beta)) = \delta(\alpha,\beta)$. 显然还有 $\delta(\alpha,\beta) < 1$ 和 $\delta(\alpha,\beta) = \delta(\beta,\alpha)$. 又，在式(4)中令 $z_1$ 趋于 $z_2$ 即得

$$\frac{|\mathrm{d}z|}{1 - |z|^2} = \frac{|\mathrm{d}w|}{1 - |w|^2}. \tag{6}$$

若记 $w = S(z)$、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$，则

$$\frac{1 - |w|^2}{|w - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|^2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1 - |z|^2}{|z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}\,\mathrm{d}\theta. \tag{7}$$

现在引入非欧长度微元和面积微元：

$$\mathrm{d}s = \frac{2|\mathrm{d}z|}{1 - |z|^2} \quad 和 \quad \mathrm{d}\sigma = \frac{4\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 - |z|^2)^2} \quad (z = x + \mathrm{i}y).$$

显然，$\mathrm{d}s$、$\mathrm{d}\sigma$ 关于线性变换 $S$ 为不变量.

与单位圆周 $C_U := \{z \mid |z| = 1\}$ 正交的 $U$ 内的圆周弧可被考虑为 $U$ 内的“直线”，即为单位圆盘内非欧几何学(或称为双曲几何学)意义下的直线.

显然，从原点 0 至点 $z = r(>0)$的非欧距离为

$$d(0,r) = \int_0^r \frac{2\mathrm{d}\,t}{1 - t^2} = \log\frac{1 + r}{1 - r}, \tag{8}$$

其中 $d$ 表示非欧距离. 如果将式(5)所定义的 $\delta$ 看作单位圆盘 $U$ 上的另一测度，那么由 $\delta(0,r) = r$ 可得二者之关系：

$$\delta(z_1,z_2) = \tanh(d(z_1,z_2)/2).$$

### 3. Fuchs 群及其基本区

设 $G$ 是由线性变换 $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ 组成的群，其中 $S_0\equiv 1$，而映照

$$S_n:\ z'=e^{i\theta_n}\frac{z-a_n}{1-\bar{a}_n z}\quad(|a_n|<1;\ n=1,2,\cdots)$$

将开单位圆盘 $U$ 共形映为自身. $z$、$z'$ 称为关于 $G$ 是互为等价点.

**定义 1**　以开单位圆盘为不变域的真不连续群称为Fuchs 群.

此后，本节中凡群 $G$ 均指 Fuchs 群. 下面将证明 $G$ 的基本区的存在. 为此先引入关于 $G$ 的正则区域的概念.

设 $z_n=S_n(0)$ 是 $z=0$ 的等价点，其中 $z_0=0$、$S_n\in G$. 置

$$\Delta_0=\{z\mid \delta(z,0)<\delta(z,z_n);\ n=1,2,\cdots\}. \tag{1}$$

由于 $G$ 是真不连续群，若 $\rho>0$ 足够小，则 $\overline{O(0,\rho)}$ 包含在 $\Delta_0$ 中. 故 $\Delta_0$ 有内点.

**定义 2**　$\Delta_0$ 称为 $G$ 的正则区域.

现在讨论 $\Delta_0$ 关于 $U$ 的相对边界. 设 $z\in U$ 为 $\Delta_0$ 的一边界点，则存在某个 $n$ 使得 $\delta(z,0)=\delta(z,z_n)$，于是

$$|z|=\left|\frac{z-z_n}{1-\bar{z}_n z}\right|,\quad 1-|z|^2=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_n z|^2},$$

$$|1-\bar{z}_n z|^2=1-|z_n|^2,\ \text{或}\ \left|z-\frac{1}{\bar{z}_n}\right|^2=\frac{1}{|z_n|^2}-1. \tag{2}$$

由于(2)是正交于单位圆周 $C_U$ 之圆弧的方程，则 $\Delta_0$ 关于 $U$ 的相对边界 $\Gamma$ 是由一些与单位圆周正交的圆弧组成，称为 $\Delta_0$ 的曲边，而两条曲边的交点称为 $\Delta_0$ 的顶点. $\Delta_0$ 之边界位于单位圆周的部分则是一闭集 $e_0\subset C_U$，$e_0$ 可能为空集.

**引理 1**　群 $G$ 的正则区域 $\Delta_0$ 具有如下性质：

(i) $\Delta_0$ 的任意两点关于 $G$ 都不是等价的；

(ii) 任一点 $a\in U$ 都有等价点属于 $\Delta_0\cup\Gamma$；

(iii) 任一 $b\in\Gamma$ 都有等价点 $b'\in\Gamma$，且 $|b|=|b'|$；

(iv) $\Delta_0$ 是圆弧凸的，即：若 $a$、$b\in\Delta_0$，则以 $a$、$b$ 为端点并与圆周 $C_0$ 正交的圆弧 $\widehat{ab}$ 必含于 $\Delta_0$ 之中.

**证** (i) 假设 $a$、$b\in\Delta_0$ 是两等价点，并记 $b=S(a)$ $(S\in G)$. 又置 $z'=S(0)$，$z''=S^{-1}(0)$，则可得下面矛盾：

$$\delta(b,0)<\delta(b,z')=\delta(S^{-1}(b),S^{-1}(z'))=\delta(a,0)$$
$$<\delta(a,z'')=\delta(S(a),S(z''))=\delta(b,0).$$

(ii) 不妨设 $a\in U$ 不是 $z=0$ 的等价点. 置 $\rho_0=\inf\limits_{n\geqslant 0}\delta(a,z_n)$，则 $\rho_0>0$，且存在 $z=0$ 的一等价点 $z'$ 使得 $\delta(a,z')=\rho_0$. 设 $S\in G$ 使得 $z'=S(0)$，并置 $a'=S^{-1}(a)$，则对于任意非负整数 $n$ 有

$$\delta(a',0)=\delta(S(a'),S(0))=\delta(a,z')$$
$$\leqslant\delta(a,z_n)=\delta(S^{-1}(a),S^{-1}(z_n))=\delta(a',S^{-1}(z_n)).$$

由于 $\{S^{-1}(z_n)\,|\,n=0,1,\cdots\}=\{z_n\,|\,n=0,1,\cdots\}$，则有

$$\delta(a',0)\leqslant\delta(a',z_n)\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

因此 $a':=S^{-1}(a)$ 属于 $\overline{\Delta_0}$.

(iii) 设 $b\in\Gamma$，那么存在一 $S\in G$ 使得 $\delta(b,0)=\delta(b,S(0))$. 置 $z'=S(0)$，$z''=S^{-1}(0)$，$b'=S^{-1}(b)$. 则

$$\delta(b,0)=\delta(S^{-1}(b),S^{-1}(0))=\delta(b',z''),$$
$$\delta(b,z')=\delta(S^{-1}(b),S^{-1}(z'))=\delta(b',0).$$

因此 $\delta(b,0)=\delta(b,z')=\delta(b',0)$，故 $|b'|=|b|$. 于是从

$$\delta(b',0)=\delta(b,0)=\delta(b',z'')$$

可得 $b'=S^{-1}(b)\in\Gamma$.

(iv) 假设 $\widehat{ab}\not\subset\Delta_0$. 由于 $\Gamma$ 是由一些与单位圆周正交的圆弧组成的，则 $\widehat{ab}$ 必与 $\Gamma$ 相交且只相交于一点，矛盾. ▌

根据(iii)，$\Delta_0$ 关于单位圆盘 $U$ 的相对边界是由一些曲边圆弧对 $\Gamma_k$、$\Gamma_k'$ 所组成的，其中，对每个 $k$，$\Gamma_k$ 中的任意一点在 $\Gamma_k'$ 中都有等价点，且它们与 $z=0$ 的距离相等. 反之亦然.

**定义 3**　区域 $\Delta_0$ 与 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k$ 的并集称为 $G$ 的基本区，记为 $D_0$.

基本区 $D_0$ 的等价区域 $D_n:=S_n(D_0)$ ($S_n\in G$; $n=1,2,\cdots$) 也是 $G$ 的基本区. 根据(ii)，它们填满开单位圆盘 $U$ 的内部. 又根据(i)，它们中的任意两个 $D_i$、$D_j$ ($i\neq j$) 互不相交，且每个 $D_n$ 中的任意两点都不等价.

从上面论述即知 $U$ 内中任一点的等价点全体在 $U$ 内无聚点.

## 4.　Fuchs 群的类型

设 $G:=\{S_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 是 Fuchs 群，而 $D_0$ 是其基本区. 对于点 $a\in D_0$，如果记 $a_n=S_n(a)$、$z_n=S_n(0)$ 和 $D_n=S_n(D_0)$，那么 $a_n$、$z_n\in D_n$. 又由于 $|a|=\delta(a,0)=\delta(a_n,z_n)$，则

$$1-|a|^2=\frac{(1-|a_n|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{a}_nz_n|^2}\leqslant\begin{cases}\dfrac{4(1-|a_n|)(1-|z_n|)}{(1-|z_n|)^2},\\[2mm]\dfrac{4(1-|a_n|)(1-|z_n|)}{(1-|a_n|)^2},\end{cases}$$

因此 $\dfrac{(1-|a|^2)(1-|z_n|)}{4}\leqslant 1-|a_n|\leqslant\dfrac{4(1-|z_n|)}{1-|a|^2}$. 由此可得

**定理 1**　设 $a\in D_0$，则

$$\text{(i)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty;\quad 或\quad \text{(ii)}\ \sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)=\infty$$

都不依赖于 $a\in D_0$ 的选择.

对应情形(i)或(ii)，$G$ 分别称为是收敛型的或发散型的.

下面将涉及到关于群 $G$ 是不变的函数 $f$，即对任意 $T\in G$，

$$f[T(z)]\equiv f(z),$$

这类函数称为群 $\mathscr{G}$ 的自守函数，我们将在 §2 专门讨论之.

**定理 2**　设 $e_0$ 是 $D_0$ 的边界位于单位圆周 $C_1:=\{z||z|=1\}$ 上的部分. 如果 $\mathrm{m}e_0>0$，那么 $G$ 是收敛型的，且使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|)<\frac{4\pi}{me_0},$$

其中 $\{z_n|n=0,1,\cdots\}$ 是 $z=0$ 的全体等价点.

**注** 其逆不真，因存在收敛型的 Fuchs 群使得 $me_0=0$.

**证** 设 $z_n=S_n(0)$, $e_n=S_n(e_0)$ $(S_n\in G)$，并置 $E=\bigcup_{n=0}^{\infty}e_n$ 和

$$u(z)=\int_{e_0}\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

由于 $\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\mathrm{d}\,\theta$ 关于群 $G$ 是不变的，故

$$me_0=u(0)=\int_{e_n}\frac{1-|z_n|^2}{|z_n-e^{i\theta}|^2}\mathrm{d}\theta\leqslant\frac{1+|z_n|}{1-|z_n|}me_n<\frac{2me_n}{1-|z_n|}.$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|)<\frac{2\sum_{n=0}^{\infty}me_n}{me_0}=\frac{2mE}{me_0}<\frac{4\pi}{me_0}$. ▌

**定理 3** 设 $G$ 是发散型的 Fuchs 群，则单位圆盘 $U:=O(0,1)$ 内不存在关于 $G$ 不变的非常数单值有界调和函数.

(参看第七章 § 3 定理 2：$O_G\subset O_{HB}$)

**证** 设在 $U$ 内存在关于 $G$ 为不变的非常数单值有界调和函数 $u(z)$，而 $v(z)$ 是其共轭调和函数，且经规范化使得 $v(0)=0$. 记 $k=u(0)$，将等位线 $\{z|u(z)=k\}$ 的包含于 $z=0$ 的足够小的邻域和 $D_0$ 之中的部分记为 $\sigma_0$，显然它必通过 $z=0$. 设

$$\int_{\sigma_0}\mathrm{d}v=c, \tag{1}$$

其中，只要适当选取 $\sigma_0$ 的积分方向即可设 $c>0$. 又设 $\sigma_n$ 是 $\sigma_0$ 的等价弧，则 $\int_{\sigma_n}\mathrm{d}v=c$. 如果置

$$F(z)=e^{2\pi(u+iv)/c},\quad F(0)=e^{2\pi k/c}, \tag{2}$$

那么 $F(z)$ 是 $U$ 内的非常数单值有界正则函数. 若让 $z$ 沿 $\sigma_n$ 取值，则 $w=F(z)$ 必画出圆周 $\{w||w|=F(0)\}$，故存在一点 $z_n^*\in\sigma_n$

使得 $F(z_n^*)=F(0)$. 根据 Blaschke 定理,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n^*|)<\infty.$$

显然 $1-|z_n|\leqslant \text{const.}\,(1-|z_n^*|)$, 故可得下面矛盾:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|)<\infty. \quad \blacksquare$$

**推论**　设 $G$ 是发散型的 Fuchs 群, 则在单位圆周 $C_U$ 上不存在这样的可测集 $E$, 它使得 $0<mE<2\pi$ 且关于 $G$ 是不变的.

**证**　假设在 $C_U$ 上存在这样的可测集 $E$. 置

$$u(z)=\int_E \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}\,d\theta,$$

则 $u(z)$ 关于 $G$ 是不变的, 且为 $U$ 内的非常数单值有界调和函数. 这与定理 3 矛盾. $\blacksquare$

如果考虑函数 $F(z)=e^{-2\pi(u+iv)/c}$, 那么类似可得

**定理 4**　设 $G$ 是发散型的 Fuchs 群, 则在单位圆盘 $U$ 内不存在关于 $G$ 不变的非常数单值正调和函数.

(参看第七章 § 3 定理 3: $O_G\subset O_{HP}$)

5.　Fuchs 群的等价点的分布

设 $a\in D_0$, 用 $n(r,a)$ 表示包含在 $\{z\,|\,|z|<r<1\}$ 中的 $a$ 的等价点的个数. 显然 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|z_n|)<\infty$ 等价于

$$\int_0^1 n(r,a)\,dr<\infty.$$

**定理 5**　$n(r,a)\leqslant\dfrac{\text{const.}}{1-r}$　$(0\leqslant r<1)$, 其中 const. 不依赖于

$a\in D_0$ 的选择.

**证** 设 $a_n=S_n(a)$ $(S_n\in G)$. 如果 $|a_n|<r$, 则

$|a_n|=\delta(a_n,0)=\delta(S_n(a),0)-\delta(a,S_n^{-1}(0))=\delta(S_n^{-1}(0),a)<r.$

所以 $n(r,a)$ 是包含在非欧圆盘 $\{z|\delta(z,a)<r\}$ 中的 $z=0$ 的等价点 $z_n$ 的个数. 设 $\Delta_0=O(0,\varepsilon)$, 记其包含 $a_n$ 的等价象为 $\Delta_n$. 取正数 $\varepsilon$ 足够小, 使得所有 $\Delta_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$互不相交.

若 $\delta(z_n,a)<r$, 则取正数 $r_1$ 使得 $1-r\leqslant\text{const.}(1-r_1)$, 且 $\Delta_n$ 包含在非欧圆盘 $\{z||\delta(z,a)<r_1\}$ 中. 又, 若用 $\sigma(\Delta_n)$ 表示 $\Delta_n$ 的非欧面积, 则有 $\sigma(\Delta_n)=\sigma(\Delta_0)$ ( $n=0,1,2,\cdots$). 又 $\{z|\delta(z,a)<r_1\}$ 和 $\{z||z|<r_1\}$ 的非欧面积相等且 $\leqslant\frac{\text{const.}}{1-r_1}$. 故

$$\sigma(\Delta_0)n(r,a)\leqslant\frac{\text{const.}}{1-r_1}\leqslant\frac{\text{const.}}{1-r},$$

所以 $n(r,a)\leqslant\frac{\text{const.}}{1-r}$. ▌

**定理 6** 设 $a\in D_0$, 则对于任意实数 $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\varepsilon}<\infty,$$

其中 $\{a_n\}$ 是 $a$ 关于 $G$ 的全体等价点.

**证** 对任意正数 $r<1$ 有

$$\sum_{|a_n|<r}(1-|a_n|)^{1+\varepsilon}=\int_0^r(1-t)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}\,n(t,a)$$

$$\leqslant(1-r)^{1+\varepsilon}n(r,a)+(1+\varepsilon)\int_0^r(1-t)^{\varepsilon}n(t,a)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\leqslant\text{const.}(1-r)^{\varepsilon}+\text{const.}\int_0^r\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{1-\varepsilon}}=O(1).$$

因此
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\varepsilon}<\infty.\ ▌$$

### 6. Fuchs 群的基本区对应的 Riemann 曲面

设 $D_0$ 是 Fuchs 群 $G$ 的基本区. 如果将 $D_0$ 的边界之等价点粘合起来，那么 $D_0$ 可被看成是 Riemann 曲面，记作 $F_G$ 或 $F$，称为 $G$ 所对应的 Riemann 曲面.

若 $D_0$ 的位于单位圆盘 $U$ 内的边界个数 $n$ 有限(必可被 4 整除)，则 $F$ 的亏格为 $n/4$，否则即为无限.

如果 $D_0$ 及其边界都包含于 $U$ 之中，那么 $F$ 是一闭 Riemann 曲面；如果 $D_0$ 只有有限 $k$ 个抛物顶点位于单位圆周 $C_U$ 之上，其中 $D_0$ 的两边都相互接触，而且 $D_0$ 位于单位圆盘 $U$ 之内的顶点个数为有限，那么 $F$ 必是从一闭 Riemann 曲面中挖去 $k$ 个点而得.

显然 $D_0$ 的等价象全体 $\{D_n | n=0,1,2,\cdots\}$ 填满整个单位圆盘 $U$，将其看作是 $F$ 的单连通覆盖面 $F^{(\infty)}$ 的代表.

设 $\Gamma$ 是 $D_0$ 的边界，而 $a\in\Gamma$ ($|a|<1$) 是 $D_0$ 的一个顶点，又设 $\{a_i | i=0,1,\cdots,n-1\}(a_0=a)$ 是 $a$ 在 $\Gamma$ 上的所有等价点所成之集，则 $|a_i|=|a|$. 记 $\alpha_i$ 为 $D_0$ 在 $a_i$ 处的内角. 可以看出，存在有限个 $D_0$ 的等价象 $D_j$ ($j=0,1,2,\cdots,m-1$) 以 $a$ 为其边界点且其全体填满 $a$ 的某个邻域. 对于每个 $D_j$，存在 $S_j\in G$，使得 $D_0=S_j(D_j)$. 记 $b_j=S_j(a)$，则 $b_j\in\Gamma$ 是 $a$ 的等价点. 一般情形，会有几个 $b_j$ 与 $a$ 重合，即 $S_j(a)=a$. 将这样的 $S_j$ 全体记为 $G_0$，设其个数为 $N$. 如果 $b_j=b_k=a_i$ ($0\leqslant i\leqslant n-1$)，那么 $S_j(a)=S_k(a)$，$S_k^{-1}S_j(a)=a$，所以 $S_k^{-1}S_j\in G_0$. 因此与 $a$ 重合的 $b_j$ 的个数也为 $N$. 由于 $\{D_j\}$ 填满 $a$ 的某个邻域，故 $N(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})=2\pi$，即

$$(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})=2\pi/N.$$

如果将 $a$ 考虑成 Riemann 曲面 $F=F^{(\infty)}$ 上的点，则在 $a$ 处，$F^{(\infty)}$ 是关于 $F$ 的 $N-1$ 阶支点. 因此如果 $F^{(\infty)}$ 是 $F$ 的非分支覆盖面，即若 $F^{(\infty)}$ 是 $F$ 的万有覆盖面时，$N=1$，所以

$$(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})=2\pi.$$

7. Fuchs 群对应的 Green 函数

**定理 7** (Myrberg)　设 $F=F_G$ 是 Fuchs 群 $G$ 对应的 Riemann 曲面. 则 $G$ 是收敛型当且仅当 $F\overline{\in}O_G$. 而且, 若 $F\overline{\in}O_G$, 则 $F$ 的以 $a\in D_0$ 为极的 Green 函数可表示为

$$g(z,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\log\left|\frac{1-\bar{a}_n z}{z-a_n}\right|,$$

其中 $\{a_n\}$ 是 $a\in D_0$ 的等价点全体.

**证**　1) 设 $F$ 存在 Green 函数 $g(z,a)$. 用 $h(z,a)$表示 $g(z,a)$ 的共轭函数, 并置 $f(z)=e^{-(g+ih)}$. 则 $f(z)$ 是单位圆盘 $U$ 内是有界正则函数, 且 $f(a_n)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 根据 Blaschke 定理, $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$, 因此 $G$ 是收敛型的.

2) 设 $G$ 是收敛型的, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty$, 因此

$$g^*(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\log\left|\frac{1-\bar{a}_n z}{z-a_n}\right| \tag{1}$$

除去 $a_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 等点外在 $U$ 内收敛, 且关于 $G$ 是不变的. 从而 $g^*(z)$ 是 $F\backslash\{a\}$ 上的单值调和函数. 又设 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$是 $F$ 的一个穷尽列, 其中 $a\in F_0$, 而 $g_n(z,a)$ 是 $F_n$ 的 Green 函数. 根据最大值原理, 由 $g^*(z)>0$ 可知在 $F_n$ 上 $g_n(z,a)\leqslant g^*(z)$. 所以

$$g(z,a)=\lim_{n\to\infty}g_n(z,a)\leqslant g^*(z)<\infty. \tag{2}$$

从而 $F$ 的 Green 函数存在, 即 $F\overline{\in}O_G$.

3) 下面证明 $g(z,a)=g^*(z)$. 为此设

$$g_n^*(z)=\sum_{k=0}^{n}\log\left|\frac{1-\bar{a}_k z}{z-a_k}\right|. \tag{3}$$

设非欧闭圆盘 $K_0=\{z|\delta(z,a)\leqslant\varepsilon\}$ $(0<\varepsilon<1)$ 包含于 $D_0$ 之中, 而 $C_0=\{z|\delta(z,a)=\varepsilon\}$ 是其 (非欧圆周)边界. 用 $K_n$ 和 $C_n$ 分别表示

$K_0$ 和 $C_0$ 的等价象. 在开单位圆盘 $U$ 中移去 $\bigcup_{k=0}^{n} K_k$，所得余集记为 $\Omega_n$. 则 $g_n^*(z)$ 在 $\Omega_n$ 内调和，且在单位圆周 $C_U$ 上 $g_n^*(z)=0$. 于是，根据最大值原理和 $g^*(z)$ 关于 $G$ 的不变性，

$$0<g_n^*(z)\leqslant \max_{C_0+\cdots+C_n} g_n^*(z)\leqslant \max_{C_0+\cdots+C_n} g^*(z)=\max_{C_0} g^*(z)$$

对任意 $z\in\Omega_n$ 都成立. 因此当 $n\to\infty$ 有

$$0<g^*(z)\leqslant \max_{C_0} g^*(z),\quad \forall z\in\Omega:=\lim_{n\to\infty}\Omega_n. \tag{4}$$

设 $H(z)=g^*(z)-g(z,a)$. 根据式(2)，$0\leqslant H(z)<g^*(z)$，故 $H(z)$ 在 $\Omega$ 内有界. 又由于 $H(z)$ 在 $\bigcup_{k=0}^{n} K_k$ 内是调和的，则在单位圆盘 $U$ 内是有界调和的. 根据 Fatou 定理，对几乎所有的 $e^{i\theta}$，极限 $\lim_{r\to 1} H(re^{i\theta})=H(e^{i\theta})$ 存在. 另外，$\lim_{r\to 1} g^*(re^{i\theta})=0$ 对几乎所有的 $e^{i\theta}$ 成立，而且 $0\leqslant H(z)<g^*(z)$，所以 $H(z)=0$ 对几乎所有的 $e^{i\theta}$ 成立. 由此可见 $H(z)$ 在 $U$ 内是有界调和的. 故得 $H(z)\equiv 0$，即

$$g(z,a)\equiv g^*(z).\ \blacksquare$$

## §2 自守函数

### 1. Riemann 曲面上半纯函数的存在性

本节旨在证明任一 Riemann 曲面存在非常数单值半纯函数.

回忆第二章 §2.5～7，Riemann 曲面 $R$ 的万有覆盖面 $\tilde{R}$ 是一正规覆盖面，故其上存在覆盖变换群 $G_{\tilde{R}}$，它与 $R$ 的基本群 $\mathscr{F}(R)$ 同构. 另外，根据单值化定理，$\tilde{R}$ 必与闭复球面、复平面或开单位圆盘三者之一(统一记为 $\Sigma$)共形同胚. 设该映照为 $\varphi$: $\tilde{R}\to\Sigma$，那

么对任意 $g\in G_R$，其复合 $\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}$ 是将 $\tilde{R}$ 的同胚象 $\Sigma$ 映上自身的共形映照，从而

$$G:=\{\varphi\circ g\circ\varphi^{-1}\mid g\in G_R\}$$

是一以 $\Sigma$ 为不变域的变换群. 它必为真不连续群.

**定义 1** 设 $\mathscr{G}$ 是以某区域 $D$ 为不变域的函数群，而 $F(z)$ 是定义在 $D$ 里的非常数单值半纯函数. 若对任意 $T\in\mathscr{G}$，在 $D$ 里有

$$F[T(z)]\equiv F(z),$$

则称 $F(z)$ 为关于 $\mathscr{G}$ 的<u>自守函数</u>.

对 $R$ 上的任一点 $p$，将 $\tilde{R}$ 覆盖在 $p$ 上的所有点记为 $\{\tilde{p}_i\}$，而将 $\tilde{p}_i$ 在 $G$ 的不变域 $\Sigma$ 的象记为 $z_p^i$. 注意到 $\{z_p^i\}_i$ 关于 $G$ 是互为等价的(全体)点. 设 $\Sigma$ 上存在自守函数 $F(z)$. 由于 $F(z)$ 在所有等价点处都取相同的值，那么，下面的定义是有意义的：

$$f(p)=F(z_p^i),\quad \forall\, p\in R.$$

于是 $f(p)$ 是 $R$ 上非常数单值半纯函数. 这样一来，$R$ 上半纯函数的存在问题可归结为自守函数的存在问题.

## 2. 不与开单位圆盘共形同胚的万有覆盖面

有下面两种情形：i) $\tilde{R}$ 与闭复球面共形同胚；ii) $\tilde{R}$ 与(开)复平面共形同胚. 显然情形 i)蕴含 $\tilde{R}$ 与 $R$ 共形同胚，故 $R$ 上存在非常数单值半纯函数. 本节第 3 段将分几种情况讨论情形 ii).

首先，由于复平面映上自身的变换

$$T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

在∞点处是单重极点，故可表示为 $T(z)=a_0+a_1z\ (a_1\neq 0)$. 然而，做为变换群的母元时，此式通常规范化为

$$T(z)=z+\omega. \qquad (*)$$

注意到群 $G$ 是乘法群，即若 $T$、$S\in G$，则 $(TS)(z)=T[S(z)]$.

于是对整数 $n_1$、$n_2$，若记 $T_i(z)=z+\omega_i\ (i=1、2)$，则有

$$(T_1^{n_1}T_2^{n_2})(z)=z+n_1\omega_1+n_2\omega_2.$$

由此可见，关系 $F[T_i(z)]\equiv F(z)$ 意味着 $F(z)$ 以 $\omega_i$ 为周期. 从而寻找自守函数就是寻找以 $\omega_i$ 为周期的周期函数.

下面引理对讨论复平面自身共形变换群 $G$ 有着积极的作用.

**引理 1** 设 $G$ 有两个异于恒同变换的母元

$$T_1(z)=z+\omega_1,\quad T_2(z)=z+\omega_2,$$

其中 $\omega_1$、$\omega_2$ 是关于整数域线性无关的复常数. 则 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ 不是实数.

**证** 记 $\lambda_1=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$. 假设 $\lambda_1$ 是实数，则有 $m_1\leqslant\lambda_1<m_1+1$，其中 $m_1$ 为整数. 显然 $\lambda_1\neq m_1$. 不妨设 $|\omega_2|\leqslant|\omega_1|$. 取 $\omega_3=\omega_1-m_1\omega_2$，则

$$0<|\omega_3|=|\omega_1-m_1\omega_2|<|\omega_2|.$$

若记 $\lambda_2=\dfrac{\omega_2}{\omega_3}$，则有 $\lambda_2=\dfrac{1}{\lambda_1-m_1}>1$. 于是存在一整数 $m_2$ 使得 $m_2\leqslant\lambda_2<m_2+1$. 假设 $\lambda_2=m_2$，则 $\omega_2=m_2\omega_3$ 且 $\omega_1=(m_1m_2+1)\omega_3$. 但这与 $\omega_1$、$\omega_2$ 关于整数域为线性无关的事实相矛盾. 故得 $\lambda_2\neq m_2$. 于是若取 $\omega_4=\omega_2-m_2\omega_3$，则有

$$0<|\omega_4|=|\omega_2-m_2\omega_3|<|\omega_3|.$$

如此不断讨论即可得一复数列 $\{\omega_m\}$，使得每个 $\omega_m$ 都是 $\omega_1$、$\omega_2$ 的整系数组合，且

$$\cdots<|\omega_m|<|\omega_{m-1}|<\cdots<|\omega_2|\leqslant|\omega_1|. \tag{1}$$

另一方面，对每个 $\omega_m$，$T_m:=z+\omega_m\in G$，故 $\omega_m=T_m(0)$ 是原点关于 $G$ 的等价点. 但由(1)知 $\{\omega_m\}$ 在复平面内必有聚点，矛盾. ▌

### 3. 复平面映上自身的共形变换群

设 $G$ 是复 $z$-平面映上自身的共形变换群. 分四种情形讨论.

1) 群 $G$ 只含恒同变换，则 $\tilde{R}$ 与 $R$ 与复平面共形同胚.

2) 群 $G$ 只含一个异于恒同变换的母元，根据式(*)，则有一个非 0 复常数 $\omega$ 使得每个 $T\in G$ 都有标准化形式：

$$T(z)=z+n\omega,\quad \text{其中 } n \text{ 为整数}.$$

取 $l_0=\{z|z=\mathrm{i}\lambda\omega,\ \lambda \text{ 为实数}\}$. 则 $l_0$ 是过原点并与矢量 $\omega$ 正交的直线. 注意到$\{l_n:=S_n(l_0)\}_{S_n\in G}$是一族平行线. 将 $l_0$ 和 $l_1$ 所夹的长条形开区域记为 $D$，则 $\sigma=D\cup l_0$ 就是群 $G$ 的基本区. 显然，函数 $w=\varphi(z):=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z/\omega}$ 将区域 $D$ 一对一共形映上沿正半实轴裂开的 $w$-复平面，使得 $l_0$ 映成正半实轴. 现在，在 $z$-复平面上定义

$$\Phi(z)=\varphi(z'),\quad \text{其中 } z' \text{ 是 } z \text{ 在 } \sigma \text{ 上的等价点}.$$

由于存在整数 $n'$ 使得 $z'=z+n'\omega$，故群 $G$ 的自守函数为

$$\Phi(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z/\omega}.$$

在情形 2)下，群 $G$ 所对应的 Riemann 曲面 $R_2$ 可通过将镶边基本区 $\bar{\sigma}=D\cup l_0\cup l_1$ 的两边 $l_0$、$l_1$ 粘合而得之. 此时，$R_2$ 是一管状曲面，亏格为 0 且非单连通. 注意，映照 $w=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z/\omega}$ 将 $R_2$ 一对一映成穿孔复平面$\{w|0<|w|<\infty\}$.

3) 群 $G$ 只含两个异于恒同变换的母元，则存在两个关于整数域为线性无关的复常数 $\omega_1$、$\omega_2$，使得每个 $T\in G$ 皆有规范形式：

$$T(z)=z+n_1\omega_1+n_2\omega_2,\quad \text{其中 } n_1, n_2 \text{ 为整数}.$$

对任意自然数 $N$，使得$|n_1|+|n_2|=N$ 的整数对$(n_1,n_2)$计有 $4N$ 个. 又由引理 1 知 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 不为实数，故存在仅与 $\omega_1$、$\omega_2$ 有关的常数 $K>0$ 使得

$$|n_1\omega_1+n_2\omega_2|\geqslant KN.$$

现在在闭圆盘 $D_M:=\{z||z|\leqslant M,\ M>1\}$上讨论级数

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{|n_1|+|n_2|\neq 0}\left\{\frac{1}{(z-n_1\omega_1-n_2\omega_2)^2}-\frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}\right\}$$

的收敛性.

由于当 $N>\frac{M}{K}$ 时有 $\frac{|z|}{|n_1\omega_1+n_2\omega_2|}\leqslant\frac{M}{KN}<1$， 故

$$\sum_{N>M/K}\left(\sum_{|n_1|+|n_2|=N}\left|\frac{1}{(z-n_1\omega_1-n_2\omega_2)^2}-\frac{1}{(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}\right|\right)$$
$$=\sum_{N>M/K}\left(\sum_{|n_1|+|n_2|=N}\left|\frac{2z(n_1\omega_1+n_2\omega_2)-z^2}{(z-n_1\omega_1-n_2\omega_2)^2(n_1\omega_1+n_2\omega_2)^2}\right|\right)$$
$$\leqslant\sum_{N>M/K}\left(\sum_{|n_1|+|n_2|=N}\frac{3M}{(KN-M)^2KN}\right)=\sum_{N>M/K}\frac{12M}{K(KN-M)^2}.$$

显然上面不等式最右边的级数是收敛的，所以最左边的级数在闭圆盘 $D_M$ 上是一致收敛的，从而在复平面上是广义一致收敛的.由此可见 $\mathscr{P}(z)$是一非常数单值半纯函数.

显然，由 $\mathscr{P}(z)$ 的构造可得

$$\mathscr{P}(z)=\mathscr{P}(-z),\quad \text{且}\quad \mathscr{P}(z+\omega_i)=\mathscr{P}(z)+c_i,$$

其中 $c_i$ 为常数，$i=1、2$. 于是用 $z=-\omega_i/2$ 代入第二式即得

$$\mathscr{P}(\omega_i/2)=\mathscr{P}(-\omega_i/2)+c_i.$$

从而 $c_i=0$，$i=1、2$. 所以 $\mathscr{P}(z)$ 是以 $\omega_1$、$\omega_2$ 为周期的双周期函数，也就是关于群 $G$ 的自守函数.

在情形 3)下，群 $G$ 的基本区可取作以原点为顶点，以两矢量 $\omega_1$、$\omega_2$ 为邻边的半开半闭平行四边形. 将镶边基本区的两组对应平行边分别粘合就得到群 $G$ 所对应 Riemann 曲面 $R_3$. 此时，$R_3$ 是(闭)轮胎面，亏格为 1.

任意两个轮胎面是拓扑同胚的，但未必是解析同胚的.

4) 假设群 $G$ 含三个异于恒同变换的母元，则对任意 $T\in G$ 有

$$T(z)=z+n_1\omega_1+n_2\omega_2+n_3\omega_3,\tag{1}$$

其中 $\omega_1$、$\omega_2$、$\omega_3$ 关于整数域为线性无关，而 $n_1$、$n_2$、$n_3$ 是整数.

根据引理 1，$\frac{\omega_1}{\omega_2}$、$\frac{\omega_2}{\omega_3}$、$\frac{\omega_3}{\omega_1}$ 都不是实数. 故 $\frac{\omega_1}{\omega_2}\neq\frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2}$. 从而

$$\begin{cases}\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2=\omega_3\\ \lambda_1\bar{\omega}_1+\lambda_2\bar{\omega}_2=\bar{\omega}_3\end{cases}\tag{2}$$

有解，设为 $\lambda_1$、$\lambda_2$. 显然 $\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$ 也是方程组(2)的解，故 $\lambda_1$、$\lambda_2$ 皆为实数. 取两个整数 $n_1$、$n_2$ 使得

$$|\lambda_1-n_1|\leqslant 1/2,\quad |\lambda_2-n_2|\leqslant 1/2.$$

记 $\omega=\omega_3-n_1\omega_1-n_2\omega_2=(\lambda_1-n_1)\omega_1+(\lambda_2-n_2)\omega_2$. 于是有

$$0<|\omega|=|\omega_3-n_1\omega_1-n_2\omega_2|\leqslant(|\omega_1|+|\omega_2|)/2.$$

因为 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ 不是实数，故 $(\lambda_1-n_1)\omega_1$ 与 $(\lambda_2-n_2)\omega_2$ 的幅角之差不可能为 $\pi$ 的整数倍. 从而 $\frac{\omega}{\omega_1}$、$\frac{\omega}{\omega_2}$ 都不是实数，且

$$|\omega|<(|\omega_1|+|\omega_2|)/2\leqslant\max(|\omega_1|,|\omega_2|).$$

现在用 $\omega$ 代替方程组(2)中的 $\omega_1$ 及 $\omega_2$ 二者之中模数大的，比如，若 $|\omega_1|\leqslant|\omega_2|$，则用 $\omega$ 代替 $\omega_2$，同时用 $\omega_2$ 代替方程组(2)中的 $\omega_3$. 由此所得的方程组$\left(\text{由于}\ \frac{\omega}{\omega_1}\neq\frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_1}\right)$

$$\begin{cases}\lambda_1\omega+\lambda_2\omega_1=\omega_2\\ \lambda_1\bar{\omega}+\lambda_2\bar{\omega}_1=\bar{\omega}_2\end{cases}\tag{2'}$$

有实数解 $\lambda_1'$、$\lambda_2'$. 于是同样可得复数 $\omega'$，使其满足下面条件：

a) $|\omega'|<\max(|\omega|,|\omega_1|)$；

b) $\frac{\omega'}{\omega}$、$\frac{\omega'}{\omega_1}$ 都不是实数；

c) $\omega'$ 是 $\omega_1$、$\omega_2$、$\omega_3$ 的整系数组合.

如此不断进行下去，可得无限个模数小于 $\max(|\omega_1|,|\omega_2|)$ 的非 0 复数 $\omega^*$，它们都满足条件 c). 于是，若对每个复数 $\omega^*$ 定义

$$T^*(z)=z+\omega^*,$$

则 $T^*\in G$ 且 $T^*(0)=\omega^*$. 这就是说每个 $\omega^*$ 都是 $z=0$ 的等价点. 但全体这样的 $\omega^*$ 在圆盘 $\{z\,|\,|z|\leqslant\max(|\omega_1|,|\omega_2|)\}$ 内有聚点，这与 $G$ 是真不连续群相矛盾. 所以变换群 $G$ 不可能含有三个或三个以上异于恒同变换的母元.

### 4. Fuchs 群对应的 Poincaré Θ-级数

本段落讨论对应于双曲型 Riemann 曲面的情形.

**定理 8** (Poincaré)　任一 Fuchs 群都有与之对应的自守函数.

**证**　设 $G$ 是以单位圆盘 $U$ 为不变域的 Fuchs 群. 则有

$$S_n(z)=\frac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n},\quad a_nd_n-b_nc_n=1,\quad S_n\in G. \tag{1}$$

考虑 $z=0$ 的等价点全体 $\{S_n(0)\}$. 显然圆盘 $O(0,1/2)$ 只含 $\{S_n(0)\}$ 中的有限个点. 于是可取足够小的正数 $h$ 使得原点的圆盘邻域 $\delta_0:=O(0,h)$ 在 $O(0,1/2)$ 内的(有限个)象 $\delta_n:=S_n(\delta_0)$ 两两不交. 从而全体 $\{\delta_n:=S_n(\delta_0)\,|\,S_n\in G\}$ 也两两不交. 于是

$$\sum_{S_n\in G}|\delta_n|<\pi\quad(|\delta_n|\text{ 表示 }\delta_n\text{ 的面积}). \tag{2}$$

为计算 $\delta_n$ 的面积，不妨设原点之象 $a_n$ 在实轴上，则对应于(1)的映照函数可改写为

$$\zeta=\frac{z+a_n}{1+\bar{a}_nz}.$$

此时，$c_n=\bar{b}_n=\dfrac{\bar{a}_n\mathrm{e}^{-ik\pi}}{\sqrt{1-|a_n|^2}}$、$d_n=\bar{a}_n=\dfrac{\mathrm{e}^{-ik\pi}}{\sqrt{1-|a_n|^2}}$ $(k\in\mathbf{Z})$. 于是

$$\delta_n\text{ 的直径}=\frac{h+a_n}{1+a_nh}-\frac{-h+a_n}{1-a_nh}=2\frac{h(1-a_n^2)}{1-a_n^2h^2}.$$

所以由式(2)可得 $\displaystyle\sum_{S_n\in G}\frac{h^2(1-|a_n|^2)^2}{(1-a_n^2h^2)^2}<\infty.$　更有

$$\sum_{S_n\in G}(1-|a_n|^2)^2<\infty,\quad\sum_{S_n\in G}(1-|a_n|)^2<\infty.$$

从而，根据式(2)，下面除去最多有限个 $c_n=0$ 的项后的级数

$$\sum_{S_n\in G}{}^{*}|c_n|^{-4}=\sum_{S_n\in G}{}^{*}\frac{(1-|a_n|^2)^2}{|\bar{a}_n|^4}$$

在 $U$ 的任一紧致集上一致收敛.

现在任取一个 $U$ 内的单值半纯函数 $H(z)$. 考虑级数

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{S_n\in G}{}^{*}(c_nz+d_n)^{-4}H[S_n(z)]\\&=\sum_{S_n\in G}{}^{*}c_n^{-4}\left(z+\frac{d_n}{c_n}\right)^{-4}H[S_n(z)].\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

对 $U$ 的任一紧致集 $V$，显然级数(3)中使得 $-\frac{d_n}{c_n}=\frac{a_n}{|a_n|^2}\in V$ 的项是有限的，故级数(3)除去这些项后所得的级数在 $V$ 上是一致收敛的. 于是可以断言级数

$$\sum_{S_n\in G}(c_nz+d_n)^{-4}H[S_n(z)]$$

在 $U$ 上广义一致收敛于一个单值半纯函数，记为 $\Theta(z)$.

对任意两个 $S_i$、$S_j\in G$，若记

$$S_{ij}=S_i\circ S_j,\quad a_{ij}=a_ia_j+b_ic_j,\quad b_{ij}=a_ib_j+b_id_j,$$
$$c_{ij}=c_ia_j+d_ic_j,\quad d_{ij}=c_ib_j+d_id_j,$$

则 $S_{ij}(z)=S_i\left(\dfrac{a_jz+b_j}{c_jz+d_j}\right)=\dfrac{a_{ij}z+b_{ij}}{c_{ij}z+d_{ij}}$. 故得

$$\begin{aligned}\Theta[S_j(z)]&=\sum_i\left(\frac{c_{ij}z+d_{ij}}{c_jz+d_j}\right)^{-4}H\{S_i[S_j(z)]\}\\&=(c_jz+d_j)^4\sum_i(c_{ij}z+d_{ij})^{-4}H[S_{ij}(z)].\end{aligned}$$

从而 $$\Theta[S_j(z)]=(c_jz+d_j)^4\Theta(z),\quad\forall z\in U.\tag{4}$$

另取一个 $U$ 内的半纯函数 $H_1(z)$，其对应的 $\Theta$-级数为 $\Theta_1$. 同理

$$\Theta_1[S_j(z)]=(c_jz+d_j)^4\Theta_1(z),\quad\forall z\in U.\tag{5}$$

于是由式(4)、(5)可知函数

$$F(z):=\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)}$$

是 $U$ 内的自守函数. 显然它是非常数的. ▌

函数 $F(z)$ 称为<u>Θ-Fuchs 函数</u>. 当 $G$ 是 Klein 群时，$F(z)$ 称为<u>Θ-Klein 函数</u>.

## §3 开 Riemann 曲面的延拓

### 1. 极大 Riemann 曲面的概念

**定义 1** 设 $R$ 是一 Riemann 曲面. 若 $R$ 可被一对一共形映上另一 Riemann 曲面 $F$ 的真子区域，则称 $R$ 是可延拓的，否则称 $R$ 是不可延拓的或极大的.

显然，紧 Riemann 曲面是不可延拓的.

极大 Riemann 曲面的概念是由 Radó,T. [1]首先提出的. 在此之前，他于 1924 年已构造了一个非紧极大 Riemann 曲面.

极大延拓的共形等价性问题将在 §4.6 中讨论. 与极大 Riemann 曲面的概念密切相关的是本性极大的概念，读者可参看 §4.5、6 和第七章 §2.3.

有关非紧镶边 Riemann 曲面延拓的概念将单独在 §4 中讨论，尽管其结果一般可直接用于开 Riemann 曲面的情形.

### 2. Riemann 曲面极大延拓的存在性

**定理 1** 任一可延拓的 Riemann 曲面都存在极大的延拓.

**注** Bochner,S. [1]首先用 Zermelo 公理给出本定理的证明(参看 §4 定理 1 的证明)，Heins,M. [1]采用另一方法. 下面是后者的简化形式.

**证** 设 $R$ 是一覆盖在复 $z$-球面 $S$ 上的可延拓的开 Riemann 曲面. 设 $R$ 被函数 $w=f(z)$ 共形映上盖在复 $w$-球上的另一 Riemann 曲面 $\Phi$ 的真子曲面 $\Phi_0$. 将 $\Phi$ 按下述方法扩张成 $\tilde{\Phi}$:

设 $C$ 是 $\Phi$ 上以 $w$ 为起点、以 $\tilde{w}$ 为终点的闭曲线，其中 $w$ 和 $\tilde{w}$ 是 $\Phi$ 上的同一点. 如果 $C$ (在 $\Phi$ 中)同伦于 0、或 (在 $\Phi$ 中)同伦

于包含在 $\Phi_0$ 之中的闭曲线，则定义 $w$ 和 $\tilde{w}$ 是 $\tilde{\Phi}$ 上的同一点. 否则定义 $w$ 和 $\tilde{w}$ 是 $\tilde{\Phi}$ 上的不同点. 按此方法扩张成的曲面 $\tilde{\Phi}$ 是 $\Phi$ 的一个覆盖面，并且是 $R$ 的一延拓. 称 $\tilde{\Phi}$ 相对于 $\Phi_0$ 是单连通的. $\tilde{\Phi}$ 中的闭曲线(在 $\tilde{\Phi}$ 中)或同伦于 0、或同伦于包含在 $\Phi_0$ 之中的闭曲线. 在下面的证明中，凡曲面 $R$ 的延拓 $\Phi$ 均指经扩张后的曲面 $\tilde{\Phi}$，即认定 $\Phi=\tilde{\Phi}$.

不妨设 $z=0\in R$ 且不是支点，且在映照 $f$ 下的象 $f(0)=0$ 也不是 $\Phi$ 的支点. 不妨设 $R$ 的极大延拓既非闭球面也非轮胎面. 将 $R$ 的万有覆盖面 $R^{(\infty)}$ 共形映上开单位圆盘 $U:=\{t\,|\,|t|<1\}$，使得 $z=0$ 被映成 $t=0$. 由此得到 $U$ 的一 Fuchs 群 $G_R$.

用映照 $\zeta=h(w)$ $(h(0)=0)$ 将 $\Phi$ 的万有覆盖面 $\Phi^{(\infty)}$ 共形映上开圆盘 $V:=\{\zeta\,|\,|\zeta|<\eta\}$，其中 $\eta=\eta_\Phi$ 由下面条件所确定：若置

$$\zeta = h(f(z)) := \varphi(z), \tag{1}$$

则

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1. \tag{2}$$

由此得到单位圆盘 $V$ 的一 Fuchs 群 $G_\Phi$.

由于 $\Phi=\tilde{\Phi}$ 相对于 $\Phi_0$ 是单连通的，则群 $G_R$ 被同态映上群 $G_\Phi$，使得对于 $G_R$ 的任一元素，必有 $G_\Phi$ 的一个元素与之对应；但对于 $G_\Phi$ 的元素，可能有 $G_R$ 的多个元素与之对应. 注意到 $R$ 被 $\zeta=\varphi(z)$ 共形映上 $G_\Phi$ 的一真子区域.

设

$$T_v:\ t' = e^{i\theta_v}\frac{t-\alpha_v}{1-\bar{\alpha}_v t}, \quad |\alpha_v|<1 \quad (v=1,2,\cdots) \tag{3}$$

是 $G_\Phi$ 的元素，则根据同态映照，$T_v$ 对应 $G_R$ 的一个元素 $S_v$：

$$S_v:\ \zeta' = e^{i\theta_v}\frac{\eta^2(\zeta-\alpha_v)}{\eta^2-\bar{\alpha}_v\zeta}, \quad |\alpha_v|<\eta \quad (v=1,2,\cdots). \tag{4}$$

考虑 $R$ 的所有上述之延拓 $\Phi$，并置

$$\eta^* = \sup_{\Phi} \eta_\Phi. \tag{5}$$

下面将证明 $\eta^*<\infty$，且存在 $R$ 的一延拓 $\Phi^*$，使得 $\eta_{\Phi^*}=\eta^*$，且 $\Phi^*$ 是极大的.

根据(5)，存在 $R$ 的一列延拓 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\eta^*=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n$，其中 $\eta_n=\eta_{\Phi_n}$. 设 $\varphi_n(z)$ $(\varphi_n(0)=0,\ \varphi_n'(0)=1)$ 是由(1)所定义的函数.

设 $\{z||z|<\rho\}$ 是 $R$ 上的一单叶圆盘. 由于 $\varphi_n$ 是单叶的，根据 Koebe 偏差定理，$\varphi_n(z)$、$\varphi_n'(z)$ 和 $1/\varphi_n(z)$ 在 $\{z||z|\leqslant\rho_1<\rho\}$ 上都是一致有界的. 由于 $\varphi_n$ 在 $R$ 上是局部单叶的，故 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $R$ 的任一紧子曲面上是一致有界的. 因此可从 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中选一子列，仍用原记号，使得存在函数 $\varphi(z)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(z)=\varphi(z),\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=1,\tag{6}$$

其收敛在 $R$ 上是广义一致的. 则 $\varphi(z)$ 在 $R$ 上是单叶的. 设

$$\left.\begin{aligned} &S_v^{(n)}:\ \zeta'=e^{i\theta_v^{(n)}}\frac{\eta_n^2(\zeta-\alpha_v^{(n)})}{\eta_n^2-\overline{\alpha_v^{(n)}}\zeta}=e^{i\theta_v^{(n)}}\frac{\zeta-\alpha_v^{(n)}}{1-\dfrac{\overline{\alpha_v^{(n)}}}{\eta_n}\cdot\dfrac{\zeta}{\eta_n}},\\ &|\alpha_v^{(n)}|<\eta_n\quad(v=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

是同态映照下对应于 $T_v$ 的群 $G_{\Phi_n}$ 中的元素. 根据 (6)，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_v^{(n)}=\alpha_v\quad(v=1,2,\cdots)\tag{8}$$

存在. 只要适当选取子列，可设下面极限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\theta_v^{(n)}=\theta_v\quad(v=1,2,\cdots).\tag{9}$$

如果假设 $\eta^*=\infty$，那么 $\eta_n\to\infty$. 所以根据 (7)、(8)、(9)，

$$S_v^{(n)}\to S_v:\ \zeta'=e^{i\theta_v}(\zeta-\alpha_v)\quad(n\to\infty).\quad(v=1,2,\cdots)$$

由于 $G_R$ 有固定点，则 $\theta_v=0$，因此

$$S_v:\ \zeta'=\zeta-\alpha_v\quad(v=1,2,\cdots).\tag{10}$$

根据 Koebe 的 1/4-圆定理，$\{z||z|<\rho\}$ 在 $\zeta=\varphi_n(z)$-平面的象包含一圆盘 $\{\zeta||\zeta|<\rho/4\}$. 故由 $\{S_v\}$ 生成的群 $G$ 是真不连续的. 从而 $G$ 必为单周期或双周期变换群. 因此 $R$ 可以以闭球面或轮胎面作为其极大延拓，这与前面的假设相矛盾. 故 $\eta^*<\infty$，即得

$$\left.\begin{array}{l} S_v^{(n)} \to S_v: \quad \zeta' = e^{i\theta_v} \dfrac{\eta^{*2}(\zeta - a_v)}{\eta^{*2} - \bar{a}_v \zeta}, \quad |a_v| < \eta^* \\ (n \to \infty). \quad (v = 1, 2, \cdots) \end{array}\right\} \quad (11)$$

因为由 $\{S_v\}$ 生成的群 $G$ 是真不连续的，所以，若记 $D_0$ 为其基本区，则 $R$ 被映上 $D_0$ 的一子区域. 如果将 $D_0$ 的边界的等价点都粘合起来，那么 $D_0$ 可看成一 Riemann 曲面 $\Phi^*$，而且 $\rho_{\Phi^*}=\rho^*$. 显然 $\Phi^*$ 是 $R$ 的一延拓.

下面证明 $\Phi^*$ 是极大的. 否则可将 $\Phi^*$ 共形映上另一 Riemann 曲面 $\Phi_1$ 的真子曲面，故 $\Phi_1$ 是 $R$ 的一延拓. 如前所为，可用映照将 $\Phi_1$ 的万有覆盖面 $\Phi_1^{(\infty)}$ 共形映上开圆盘 $V_1:=\{\zeta_1 \mid |\zeta_1|<\eta_1\}$. 若设 $\zeta=\varphi^*(z)$ $(\varphi^*(0)=0,\ \varphi^{*\prime}(0)=1)$ 和 $\zeta_1=\varphi_1(z)$ $(\varphi_1(0)=0,\ \varphi_1'(0)=1)$ 分别是对应于 $\varphi^*$ 和 $\varphi_1$ 的满足关系 (1)的函数. 则圆盘 $\{\zeta \mid |\zeta|<\eta^*\}$ 被共形映上 $V_1$ 的一个真子区域，它是 $\Phi^*$ 的象. 又设 $\zeta_1=g(\zeta)$ $(g(0)=0)$ 是其映照函数，则根据 Schwarz 引理，

$$g'(0) < \eta_1/\eta^*.$$

由于 $\varphi_1(z)=g(\varphi^*(z))$，$\varphi_1'(0)=g'(0)\varphi^*(0)$，则有 $g'(0)=1$，从而 $\eta^*<\eta_1$. 与定义相矛盾. 故 $\Phi^*$ 是极大的. ▌

### 3. 极大 Riemann 曲面的性质

**定理 2**　开 Riemann 曲面 $R$ 是极大的当且仅当 $R$ 满足下述两条件：

a) $R$ 不含有限亏格的非紧端；

b) $R$ 不含被正则嵌入的单连子区域 $V$，即 $V$ 可被共形映上开单位圆盘的一真子区域并使其边界 $\partial V$ 被映入单位圆周.

**证**　首先设(a)不成立. 设 $\Omega$ 是 $R$ 的具有有限亏格的非紧端. 由于任一亏格有限的开 Riemann 曲面都能被嵌入一紧 Riemann 曲面之中，故 $\Omega$ 可被嵌入一紧镶边 Riemann 曲面 $\bar{\Omega}^*$ 之中，使得 $\Omega$ 关于 $R$ 的相对边界 $\partial\Omega$ 与 $\bar{\Omega}^*$ 的边界恒同. 记 $\Omega^*$ 为

$\bar{\Omega}^*$ 的内部. 将 $\Omega$ 的点和 $\Omega^*$ 中与之对应的点粘合，由此得到一 Riemann 曲面 $R\cup\Omega^*$. 显然 $(R\cup\Omega^*)\backslash R=\Omega^*\backslash\Omega$ 是一非空紧致集，故 $R$ 是可延拓的.

其次设 b)不成立，即 $R$ 有一单连通子区域 $V$ 可被共形映上开单位圆盘 $U$ 的一真子区域并使其边界 $\partial V$ 被映入单位圆周. 现将 $V$ 的点和它在 $U$ 的象粘合，由此而得的 Riemann 曲面 $R\cup U$ 必为 $R$ 的一延拓.

最后，设 $R$ 满足 a)但非极大. 设 $R^*$ 是 $R$ 的一延拓. 取一点 $p_0\in R^*\backslash R$ 使得 $p_0$ 是 $R$ 的边界点. 根据 a)，$p_0$ 的参数邻域 $\Delta$ 必使得 $\Delta\cap R$ 的任一分支都是单连通的. 故 b)不成立. ▌

4. **极大开 Riemann 曲面的判别**

**定理 3**　设 $R$ 是一覆盖在复 $z$-球面 $S$ 上的有限 $n$ 叶开 Riemann 曲面. 若 $R$ 的大范围聚值集 $E:=C_R$ 是一零容闭集，且 $E$ 的每一点都是 $R$ 的支点投影的极限点，则 $R$ 是不可延拓的.

**证**　首先证明 $R\in O_G$. 否则假设 $R\overline{\in} O_G$. 如果 $E$ 中有点被 $R$ 所覆盖，那么将 $R$ 盖在其上的点全部移去，由此得一 Riemann 曲面 $R^*$，它是 $\Omega:=S\backslash E$ 的一 $n$ 叶完全覆盖面. 由于 $R\overline{\in} O_G$，故可得 $R^*\overline{\in} O_G$. 设 $g(p,p_0)$ 是 $R^*$ 的以 $p_0$ 为极的 Green 函数，记 $z_0\in\Omega$ 为 $p_0$ 在 $S$ 的投影. 对任一点 $z\in\Omega$，将 $R^*$ 覆盖在其上的 $n$ 个点记为 $p_1(z),\cdots,p_n(z)$. 则 $\hat{g}(z,z_0):=\sum_{i=1}^{n}g(p_i(z),p_0)$ 是 $\Omega$ 上的正调和函数，且在 $z_0$ 处具有对数奇性 $\log\frac{1}{|z-z_0|}$. 因此 $\Omega$ 上存在 Green 函数，故 $\gamma(E)>0$. 矛盾. 即得 $R\in O_G$.

假设 $R$ 是可延拓的，下面将导出矛盾.

设 $R$ 被函数 $w=f(z)$ 共形映上盖在复 $w$-球上的另一 Riemann 曲面 $\Phi$ 的真子曲面 $\Phi_0$. 则存在 $\Phi$ 的一个内点 $w_0$ 使其同

时为 $\Phi_0$ 的边界点. 不妨设 $w_0$ 不是 $\Phi$ 的支点. 现在取一足够小的数 $\rho>0$ 是得圆盘 $\Delta:=O(w_0,\rho)$ 及其边界 $C:=\{w\,|\,|w-w_0|=\rho\}$ 都包含于 $w_0$ 的参数邻域内.

置 $\Phi_0^{(\rho)}=\Phi_0\cap\Delta$, 并记 $M$ 是 $\Phi_0^{(\rho)}$ 的边界位于 $\Delta$ 的那一部分. 记 $g=f^{-1}$. 假设 $\gamma(M)=0$, 则 $D:=\Delta\backslash M$ 是一连通区域, 且 $g(w)$ 是 $D$ 上的半纯函数. 如果 $g(w)$ 在 $w_1\in M$ 是半纯的, $z_1=g(w_1)$ 是 $R$ 的聚值点, 故必为 $R$ 的支点的极限点, 矛盾. 由此可知 $M$ 的每一点都是 $g(w)$ 的本性奇点. 这样一来, 在 $M$ 的任一邻域内, 除去复球面 $S$ 的一可能的例外零容集, $g(w)$ 必取 $S$ 的每个值无限多次. 这与 $R$ 是有限叶相矛盾. 因此只能是 $\gamma(M)>0$. 从而可得 $\Phi_0\in\overline{\in}O_G$, 即有 $R\in\overline{\in}O_G$. 矛盾. ▌

日本 Tamura, J. [1]将上述 Tsuji, M. 的结果推广如下:

**定理 4**　设 $R$ 是一覆盖在复 $z$-球面 $S$ 上的开 Riemann 曲面, 且不含有多连通的平面型的非紧子区域. 又设 $R$ 有闭子集 $E$ 使得 $S\backslash E$ 的每一点都同样被 $R$ 覆盖有限多 $p$ 次. 若 $E$ 是 $N_{SD}$ 集(参看第五章 § 1.7), 则 $R$ 是极大的.

此处略去其证明.

### 5. 开 Riemann 曲面的延拓方法

首先设 $\Omega$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 的素端, 即 $R$ 的一非紧子曲面, 其相对边界 $\Gamma$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 若 $\Omega$ 是平面型的, 则可将 $\Omega$ 一对一共形映入单位圆盘使 $\Gamma$ 中有一曲线 $\alpha$ 映成单位圆周. 于是通过将单位圆周与 $\alpha$ 之对应点的粘合可将单位圆盘共形嵌入 $R$ 而延拓之. 此过程可形象地理解为"填补空洞", 称之为平面型素端式的延拓.

其次考虑 $R$ 的一相对紧致的正则子区域 $R_0$, 而 $u(z)$ 是 $R\backslash R_0$ 上的关于 $\partial R_0$ 的调和测度, 其中 $0<u(z)\leqslant 1$ 且在 $\partial R_0$ 上 $u(z)=1$. 注意到 $u(z)\equiv 1$ 当且仅当 $R\in O_G$. 又设 $u^*(z)$ 是 $u(z)$ 在 $R\backslash R_0$ 上的

(多值)共轭调和函数. 于是 $d(u+iu^*)$是 $R\backslash R_0$ 上的全纯微分，故在 $R\backslash R_0$ 上最多有可数个零点，除非 $u(z)$恒为常数.

设 $u(z)$不恒为常数，而 $p\in R\backslash R_0$ 不是 $d(u+iu^*)$的零点. 在点 $p$ 的邻域内任取 $u^*$ 的一分支，仍记为 $u^*$. 取一从点 $p$ 出发的等位弧线，使得当 $z$ 沿该弧线远离 $p$ 时 $u(z)$为单调下降的. 将该弧线尽可能延伸，最终或抵达 $d(u+iu^*)$的零点、或抵达 $R$ 的理想边界. 将此弧线记为 $J(p)$，并称之为 $u^*$ 的从点 $p$ 出发的<u>等位弧线</u>. 显然 $J(p)$的取法与 $u^*$ 之分支的取法无关. 现在在 $R\backslash R_0$ 取两点 $p$、$q$ 使满足：

1) 可用 $R\backslash R_0$ 内的等位弧线$\{z\,|\,u(z)=\lambda\}$之简单子弧段 $J_\lambda$ 将 $p$、$q$ 相连接，其中 $0<\lambda<1$；
2) $J_\lambda$ 上没有 $d(u+iu^*)$的零点，且 $J_\lambda$ 包含 $p$、$q$ 作为其端点；
3) 当 $z$ 沿 $J_\lambda$ 从 $p$ 移向 $q$ 时 $u(z)$为单调下降的；
4) 分别从点 $p$、$q$ 出发的 $u^*$ 的等位弧线 $J(p)$、$J(q)$都抵达 $R$ 的理想边界.

显然 $J(p)\cap J_\lambda=\{p\}$、$J(q)\cap J_\lambda=\{q\}$、$J(p)\cap J(q)=\varnothing$，所以 $J:=J(p)\cup J_\lambda\cup J(q)$ 是 $R\backslash R_0$ 内的简单弧线. 由于 $R$ 是连通的，故 $R\backslash J$ 或为连通的、或由两个分支组成. 若后者发生，则将不包含 $R_0$ 的分支记为 $S(p,q)$，称之为 $R$ 之调和测度 $u(z)$的<u>护板</u>. 护板的定义对非 $O_G$ 类曲面才有意义.

可以证明：若护板 $S(p,q)$是单连通，则 $u^*$ 的任一分支都是单叶的，且 $w=u+iu^*$ 将护板 $S(p,q)$一对一共形映上矩形 $T$：

$$\{w\,|\,0<\mathrm{Re}w<\lambda=u(p)=u(q),\ u^*(q)<\mathrm{Im}w<u^*(p)\}.$$

现在将 $T$ 延拓，例如延拓成下面的集 $\tilde{T}$：

$$T\cup\left\{w\ \middle|\ \mathrm{Re}w\leqslant 0,\ \left|w-\frac{u^*(p)+u^*(q)}{2}\right|<\frac{u^*(p)-u^*(q)}{2}\right\}.$$

只要通过将点 $z\in S(p,q)$与点 $f(z)\in T$ 相粘合即可将 $R$ 和 $\tilde{T}$ 之并视为 $R$ 的延拓. 此过程可形象地理解为“嵌立一堵墙”，称之为

单连通护板式的延拓. 护板 $S(p,q)$未必都是单连通的. 若 $S(p,q)$ 是平面型而非单连通的，则可将其进行平面型素端式延拓.

最后考虑 $R$ 的一单连通非紧正则子区域 $D$. 可用某映照 $\varphi$ 将 $D$ 一对一共形映上单位圆盘 $U$，使其相对边界对应于单位圆周 $\Gamma$ 的一子集 $\gamma$. 于是 $\gamma$ 关于单位圆周的余集 $I:=\Gamma\setminus\gamma$ 可视为 $D$ 之理想边界的实现. 如果 $I$ 是全不连通且非 $N_D$ 集，那么称 $D$ 具有拥挤理想边界. 显然此定义是合理的，因为所述的性质与共形映照 $\varphi$ 的选择无关；而全不连通非 $N_D$ 类集的存在可参看根据第七章 § 5 定理 7. 具有拥挤理想边界区域 $D$ 可以按下面方式进行延拓：设映照 $\psi$ 将单位圆盘 $U$ 一对一共形映上自身的真开子集 $V$，使得 $\gamma$ 对应 $\Gamma$ 的一相对开子集. 在单位圆盘 $U$ 内取一区域 $\tilde{V}$ 使得 $V\subsetneqq\tilde{V}\subset U$，例如取 $\tilde{V}=U$，于是只要通过将点 $z\in D$ 与点 $\psi\circ\varphi(z)\in V$ 相粘合即可将 $R$ 和 $\tilde{V}$ 之并视为 $R$ 的延拓. 此过程可形象地理解为"敲击区域的边缘使之延展"，称之为具有拥挤理想边界之圆盘式的延拓. 映照 $\psi$ 的存在性可参看 Saro, L. & Oikawa, K. [1] 第五章 5B.

上面的陈述是日本 Sakai, M. [2]对定理 4 条件 b)进行深入细致分析所获得的，它给出了可延拓曲面是如何进行延拓的直观叙述，其结论如下：

**定理** 5　设 $R$ 是一可延拓 Riemann 曲面. 则 $R$ 至少允许下面三种延拓方法之一：

(i) 平面型素端式的延拓；

(ii) 单连通护板式的延拓；

(iii) 具有拥挤理想边界之圆盘式的延拓.

# §4　非紧极大镶边 Riemann 曲面*

## 1.　镶边 Riemann 曲面延拓的概念

设 $R\bigcup\alpha$ 是镶边 Riemann 曲面. 记 $X=R\bigcup\alpha$.

**定义 1**　设 $X':=R'\bigcup\alpha'$ 是镶边 Riemann 曲面. 若存在将 $X$ 映入 $X'$ 的(直接)共形映照 $f$, 则称 $(f,X')$ 是 $X$ 的一个延拓. 设 $(f_1,X_1)$ 和 $(f_2,X_2)$ 是 $X$ 的两个延拓. 若存在将 $X_1$ 映入 $X_2$ 的(直接)共形映照 $h$, 使得 $f_2=h\circ f_1$, 则说 $(f_1,X_1)$ 不大于 $(f_2,X_2)$, 记为 $(f_1,X_1)\leqslant(f_2,X_2)$; 还有, 若映照 $h$ 是映上的, 则说 $(f_1,X_1)$ 与 $(f_2,X_2)$ 相等, 记为 $(f_1,X_1)=(f_2,X_2)$. 显然关系"$\leqslant$"形成 $X$ 之延拓的一个次序. 这一次序中的极大元素称为 $X$ 的极大延拓. 若 $(i,X)$ 是极大元素, 其中 $i$ 是恒同映照, 则称 $X$ 是极大的或不可延拓的, 否则称为可延拓的.

首先, 与任意可延拓的开 Riemann 曲面一样, 有

**定理 1**　任意可延拓的镶边 Riemann 曲面都有极大延拓.

**证**　设 $\{(f_j,X_j)\mid j\in J\}$ 是 $X$ 之延拓的一全序子集. 将指标集 $J$ 按下述方法排序: 若$(f_j,X_j)\leqslant(f_k,X_k)$, 则 $j\leqslant k$. 于是存在将 $X_j$ 映入 $X_k$ 的共形映照 $h_j^k$ 使得 $f_k=h_j^k\circ f_j$. 由此导出序集

$$\{(X_j,h_j^k)\mid j\leqslant k,\ j、k\in J\}.$$

现定义等价点如下: 点 $a_j\in X_j$ 和 $a_k\in X_k$ 称为是等价的若存在 $l\in J$ 使得 $l\geqslant j、k$, 且 $h_j^l(a_j)=h_k^l(a_k)$. 记 $X'$ 为 $\bigcup_{j\in J}X_j$ 在等价关系下的商空间. 将点 $a_j\in X_j$ 的等价类记为 $\tilde{a}_j$. 由镶边 Riemann 曲面

* 除定理 1 外, 本节是作者的近期成果, 参看 Qiu Shuxi [7].

的结构可知，对每个 $j$，映照 $h^j: X_j \to X'$，$a_j \mapsto \tilde{a}_j$ 是(直接)共形的. 容易证明：对于任意 $j,k\in J$，$h^j\circ f_j = h^k\circ f_k$. 因此可定义 $X'$ 上的映照 $f=h^j\circ f_j$. 显然$(f,X')$是 $X$ 的一延拓，且对任意 $j\in J$，$(f,X')\geqslant(f_j,X_j)$. 于是由 Zorn 引理可知定理成立. ▌

相关的结果还可参看文献 Jurchescu,M [1].

## 2. 曲面的可延拓性与修正价函数的关系

**引理 1** 设 $w=f(p)$ 是 $R\bigcup\alpha$ 上的非常数半纯函数. 又设 $G$ 是 $w$-球 $K$ 的一单连解析 Jordan 区域. 如果 $f^{-1}(G)$ 含有一分支 $\Delta$ 使得 $\Delta\bigcap\alpha=\varnothing$，且在 $f(\Delta)$ 上有 $n^*_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty$，那么 $(\Delta,f|_\Delta)$ 是 $f(\Delta)$ 的正则覆盖.

因此，若 $G\backslash f(\Delta)$ 含有一孤立点，则 $R\bigcup\alpha$ 是可延拓的.

**证** 记 $m=n^*_{f|_\Delta}(w)$. 假设 $(\Delta,f|_\Delta)$ 不是 $f(\Delta)$ 的正则覆盖，则 $C_\Delta(f|_\Delta)\bigcap f(\Delta)\neq\varnothing$. 取一 $w_0\in C_\Delta(f|_\Delta)\bigcap f(\Delta)$. 由于 $n^*_{f|_\Delta}(w_0)=m$，则存在 $w_0$ 的一足够小的邻域 $G$，使得 $f^{-1}(G)$ 恰好有 $m$ 个单连紧分支. 但 $f^{-1}(G)$ 至少含有一非紧分支 $\Delta_0$. 现任取一点 $p_0\in\Delta_0$，并记 $w'=f(p_0)$，则 $w'\in G$ 且有 $n^*_{f|_\Delta}(w')\geqslant m+1$. 矛盾. ▌

**引理 2** 设 $R\bigcup\alpha$ 是极大镶边 Riemann 曲面，而 $w=f(p)$ 是其上的非常数半纯函数. 又设 $G$ 是 $w$-球 $K$ 的一单连解析 Jordan 区域使得 $G\bigcap C_R(f)\neq\varnothing$. 设 $\Delta$ 是 $f^{-1}(G)$ 的任意一个非紧分支，如果 $\Delta\bigcap\alpha=\varnothing$ 且在 $f(\Delta)$ 上有 $n^*_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty$，那么

(i) $f(\Delta)$ 不是单连通的.

(ii) $(\Delta,f|_\Delta)$ 既不是 $f(\Delta)$ 的最强、也不是最弱的覆盖.

**证** 根据引理 1，$(\Delta,f|_\Delta)$ 是 $f(\Delta)$ 的正则覆盖. 若 $f(\Delta)$ 是单连通的，则 $\Delta$ 也是单连通的. 那么 $R\bigcup\alpha$ 是可延拓的. 矛盾.

如果 $(\Delta,f|_\Delta)$ 是 $f(\Delta)$ 的最弱覆盖，那么 $f|_\Delta$是恒等映照，故 $\Delta$ 是平面型的，那么 $R\bigcup\alpha$ 是可延拓的. 矛盾.

最后，根据(i)和 $f|_\Delta$ 的修正价函数的有界性即可知 $(\Delta, f|_\Delta)$ 不是 $f(\Delta)$ 的最强覆盖面. ▌

**定理** 2　设 $w=f(p)$是镶边 Riemann 曲面 $R\cup\alpha$ 上的非常数单值半纯函数，而 $G$ 是 $w$-球面 $K$ 的一单连解析 Jordan 区域，且 $G\cap C_R(f)\neq\varnothing$. 如果 $f^{-1}(G)$有一非紧分支 $\Delta$ 使得 $\Delta\cap\alpha=\varnothing$且

a) 在 $f(\Delta)$ 上 $n^*_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty$; 和

b) $G\setminus f(\Delta)$ 的每个分支都包含一连续统

都成立，那么 $R\cup\alpha$ 是可延拓的.

**证**　假设 $R\cup\alpha$ 是不可延拓的. 下面将导出矛盾.

首先在条件 a)下有 $G\setminus f(\Delta)\supset G\cap C_\Delta(f|_\Delta)$. 任取 $G\setminus f(\Delta)$ 的一个分支，则它的边界必包含 $G$ 中的一连续统 $\gamma$. 根据第五章§1 引理 1，可取一点 $w_0\in\gamma$ 和一足够小的正数 $\varepsilon_1<1$ 使得 $G_1'\setminus\gamma$ 是非连通的，其中 $G_1'=O(w_0,\varepsilon_1)$. 由 a)可知，对 $G_1'\cap f(\Delta)$ 的任一分支 $D$，$f^{-1}(D)$ 的每个全包含于 $\Delta$ 中的分支 $\Omega$ 都使得在 $D=f(\Omega)$ 上 $n^*_{f|_\Omega}(w)\equiv\text{const.}<\infty$. 根据引理 2，$D$ 都不是单连通的.

现在在 $G_1'\cap f(\Delta)$ 中任取一分支并记为 $D_1$. 在 $D_1$ 内作一条解析 Jordan 曲线 $\sigma_1$ 使其环绕 $D_1$ 的内边界的某一部分 $\eta_1$. 设 $G_1$ 是被 $\sigma_1$ 所围成的、复球面 $K$ 的包含 $\eta_1$ 的单连通区域. 根据条件 b)，$\eta_1$ 必包含一连续统 $\gamma_1\subset G\cap C_\Delta(f|_\Delta)$.

再次根据第五章§1 引理 1，取一点 $w_1\in\gamma_1$ 和一正数 $\varepsilon_2<1/2$ 使得 $G_2'\setminus\gamma_1$ 是非连通的，其中 $G_2'=O(w_1,\varepsilon_2)\subset G_1$. 根据引理 2，$G_2'\cap f(\Delta)$ 的分支不是单连通的，取其一为 $D_2$. 在 $D_2$ 内作一条解析 Jordan 曲线 $\sigma_2$ 使其环绕 $D_2$ 的内边界的某一部分 $\eta_2$. 设 $G_2$ 是被 $\sigma_2$ 所围成的、复球面 $K$ 的包含 $\eta_2$ 的单连通区域. 根据条件 b)，$\eta_2$ 必包含一连续统 $\gamma_2\subset G\cap C_\Delta(f|_\Delta)$. 显然 $G_2\subset G_2'\subset G_1$.

只要不断重复上述过程即可得复球面 $K$ 的一单连通区域列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ 使其对任意非负整数 $n$ 有：

1) $\overline{G}_{n+1}\subset G_n$，且 $G_n$ 的直径 $\mathrm{diam}(G_n)<1/n$ $(n>0)$；

2) $G_n\bigcap C_\Delta(f|_\Delta)\neq\varnothing$；

3) $G_n$ 的边界 $\sigma_n$ 是一紧致的解析 Jordan 曲线，且 $\sigma_n\subset f(\Delta)$，其中 $G_0=G$. 因此，从 $f^{-1}(G_n)(n=1,2,\cdots)$ 的所有分支组成的集族中可以选取 $R$ 的一镶边好子域列 $\{\Delta_n\bigcup\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使其满足：

1′) $\Delta_n$ 是 $R$ 的非紧子端，其边界 $\delta_n$ 是紧致的且 $f(\delta_n)=\sigma_n$；

2′) $\overline{\Delta}_{n+1}\subset\Delta_n$，且 $f(\Delta_n)$ 的直径 $\mathrm{diam}[f(\Delta_n)]<1/n$ $(n>0)$.

注意到 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{f(\Delta_n)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{G}_n$ 仅包含 $K$ 的一个点 $w'$，它必为 $f$ 的一个聚值. 显然 $w'$ 是 $G\setminus f(\Delta)$ 的单点分支，与(b)矛盾. ▌

### 3. 半纯函数的渐近点

设 $R\bigcup\alpha$ 是一非紧镶边 Riemann 曲面，其边界 $\alpha$ 为紧致. 又设 $w=f(p)$ 是 $R\bigcup\alpha$ 上的非常数半纯函数. 对于 $w$-球 $K$ 的好子域 $G$，考虑 $f^{-1}(G):=\{p|p\in R\bigcup\alpha,\ f(p)\in G\}$的一非紧分支 $\Delta$，记其关于 $R\bigcup\alpha$ 的相对边界为 $\delta$. 设 $\delta\bigcap\alpha=\varnothing$. 将 $f$ 在 $\Delta$ 的相对理想边界 $\beta_\Delta$ 的渐近集为 $A_\Delta(f|_\Delta,\beta_\Delta)$，其中 $f|_\Delta$ 是 $f$ 在 $\Delta$ 上的限制. 对点 $w\in A_R(f,\beta)$，置

$$\Sigma(w)=\{\Delta|w\in A_\Delta(f|_\Delta,\beta_\Delta),\ \mathrm{dist}(w,f(\delta))>0\},$$

其中 dist 表示“距离”. 将 $\Sigma(w)$ 中的元素 $\Delta$ 称为 <u>$w$-半岛</u>.

**定义 2** 设 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\Sigma(w)$ 的一元素列. 若

a) $\Delta_{n+1}\subset\Delta_n$, $n=1,2,\cdots$；和

b) $\mathrm{diam}[f(\Delta_n)]\to 0$, $n\to\infty$,

则称设 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\Sigma(w)$ 的一个 <u>$w$-半岛列</u>.

设 $\{\Delta_n\}$ 和 $\{\Delta'_m\}$ 是 $\Sigma(w)$ 的两个 $w$-半岛列. 若对任意自然数 $n$，存在自然数 $m$ 使得 $\Delta_n\supset\Delta'_m$，反之亦然，则称这两个 $w$-半岛列是<u>等价的半岛列</u>. $\Sigma(w)$ 的一个 $w$-半岛列的等价类称为 $f$ 的一个 <u>$w$-渐近点</u>，常用诸如 $\sigma(w)$ 的记号来表示，而式子 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$

则表示 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\sigma(w)$ 的一代表列.

**定义 3**　设 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $f$ 的一 $w$-渐近点. 若

$$\limsup_{n\to\infty} n_{f|_{\Delta_n}}(w) = \infty,$$

则称 $\sigma(w)$ 为 $f$ 的奇异 $w$-渐近点. 否则称 $\sigma(w)$ 为 $f$ 的有限 $w$-渐近点 (简称为 $w$-渐近点).

显然, 若 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}$ 是有限 $w$-渐近点, 则存在自然数 $N$ 使得对任意 $n>N$, 由 $f$ 限制在 $\Delta_n$ 上所生成的 Riemann 曲面 $\tilde{\Delta}_n$ 必为有限多叶, 且叶数相同.

**定义 4**　设 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $f$ 的一有限 $w$-渐近点. 若存在 $R\cup\alpha$ 的一 Stoïlow 理想边界点 $\rho=\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ (即 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\rho$ 的代表列), 使得若对任意自然数 $n$, 存在自然数 $m$ 满足条件 $\Delta_n\supset\Omega_m$, 则称 $\sigma(w)$ 是 $f$ 的一点状 $w$-渐近点(简称为 $w$-pl-渐近点). 而且, 如果每个 $\Omega_m$ 都具有正亏格, 那么 $\sigma(w)$ 称为是 $f$ 的一正点状 $w$-渐近点(简称为 $w$-ppl-渐近点).

设 $\rho=\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $R\cup\alpha$ 的一 Stoïlow 理想边界点. 若 $f$ 在 $\rho$ 的大范围聚值集为单点 $v\in K$, 即 $C_R(f,\rho)=\{v\}$, 则必有 $f$ 的一点状渐近点与 $\rho$ 对应.

### 4.　极大镶边 Riemann 曲面的理想边界性质

设 $\Omega$ 是 $R$ 的一子区域. 对 $f$ 的渐近点 $\sigma(w)$, 若存在 $\sigma(w)$ 的代表列 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\subset\Omega$, 则说 $\Omega$ 包含 $\sigma(w)$.

**定义 5**　设 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $f$ 的一 $w$-渐近点. 若对任意自然数 $n$, $\Delta_n$ 包含 $f$ 的一个支点 (对应地, pl-渐近点、ppl-渐近点), 则 $\sigma(w)$ 称为 $f$ 的支点(对应地, pl-渐近点、ppl-渐近点)的极限点.

**定理 3**　设 $R\cup\alpha$ 是极大镶边 Riemann 曲面，而 $w=f(p)$ 是其上一半纯函数. 又设 $G$ 是 $w$-球 $K$ 的一好子域. 如果 $f^{-1}(G)$ 有一非紧分支 $\Delta$ 使得 $\Delta\cap\alpha=\varnothing$，且满足条件

a) $G\cap A_1(f|\Delta,\beta_1)\neq\varnothing$；和

b) $n^*_{f|\Delta}(w)\equiv\text{const.}<\infty\quad\forall\, w\in f(\Delta)$，

那么 $\Delta$ 至少包含 $f$ 的一个 ppl-渐近点.

**证**　根据定理 2，$G\setminus f(\Delta)$ 至少包含一个单点分支 $\{w_0\}$，而且根据引理 1，$w_0$ 不是 $G\setminus f(\Delta)$ 的孤立点. 因此，根据引理 2，对于任一以 $w_0$ 为心的足够小的圆盘 $G_r$，对于 $f^{-1}(G_r)$ 任一非紧分支 $\Delta_r$，$f(\Delta_r)$ 不是单连通的.

类似定理 2 的论证可得，$R$ 的一镶边子端列 $\{\Delta_n\cup\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足定理 2 证明中的条件 (1′)和(2′). 显然 $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 既是 $f$ 的一个 pl-渐近点的代表列，也是 $R$ 的一个 Stoilow 理想边界点的代表列. 又因为 $R\cup\alpha$ 是极大的，所以 $\Delta_n$ 不是平面型的. 因此 $\sigma=\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $f$ 的一个 ppl-渐近点. ▌

**定理 4**　设 $R\cup\alpha$ 是一具有紧边界 $\alpha$ 的非紧镶边 Riemann 曲面. 则 $R\cup\alpha$ 是极大的充分必要条件是对于任意 $R\cup\alpha$ 上的半纯函数 $w=f(p)$，$f$ 的每个渐近点必为下面三者之一：

(i) $f$ 的奇异渐近点；

(ii) $f$ 的支点的极限点；

(iii) $f$ 的 ppl-渐近点的极限点.

**证**　充分性是显然的.

必要性. 设 $\sigma(w)=\{\Delta_n\}$ 是 $f$ 的一渐近点. 如果

$$\limsup_{n\to\infty} n_{f|\Delta_n}(w)<\infty,$$

而且 $\sigma(w)$ 不是 $f$ 的支点的极限点，其中 $f|_{\Delta_n}$ 是 $f$ 在 $\Delta_n$ 上的限制，那么必存在自然数 $N>0$ 使得对任意自然数 $n>N$，

$$\sup n_{f|\Delta_n}(w)<\infty,$$

且 $\Delta_n$ 中不包含 $f$ 的任何支点. 根据第四章 § 3 引理 1，存在 $\Delta_n$ 的一非紧子区域 $\Delta_n'$ 使得

$$n^*_{f|\Delta_n'}(w) \equiv \text{const.} < \infty \quad \forall\, w \in f(\Delta_n').$$

根据定理 3，$\Delta_n'$ 至少包含 $f$ 的一个 ppl-渐近点. ▌

由定理 4 容易得出下面定理 5.

**定理 5**　设 $R \cup \alpha$ 是一极大的非紧镶边 Riemann 曲面. 如果 $R \cup \alpha$ 是 $w$-球 $K$ 的覆盖面，那么 $R$ 的任一个 Stoïlow 理想边界点 $\rho = \{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 必为下面三者之一：

(i) 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup n_{\pi|_{\Omega_n}}(w) = \infty$ 的理想边界点；

(ii) $\pi$ 的支点的极限点；

(iii) $\pi$ 的 ppl-渐近点的极限点，

其中 $\pi$ 是 $R$ 映入 $K$ 的投影映照.

## 5.　一个极大开 Riemann 曲面的例子

本节构造一极大曲面旨在说明定理 4(iii)的几何意义.

**例 1**　存在满足下面诸条件的极大的开 Riemann 曲面 $R$：

(i) $R$ 是复 $z$-球面 $S := \{z \mid |z| \leqslant \infty\}$ 的有限叶覆盖面；

(ii) $R$ 上不存在任何支点；

(iii) $R$ 具有 Iversen 性质.

**例 1 的构造**　设 $I$ 是复球面 $S$ 上的闭单位线段. 从线段 $I$ 中间取去长度为 $1/m$ $(m \geqslant 3)$ 的线段 $I_{11}$，余下的部分 $E_1 := I \setminus I_{11}$ 是两个相等的线段. 一般情形，从线段 $I$ 余下的部分 $E_{n-1}$ 的每个分支的 $E_{n-1,j}$ 中间部分取去长度为 $1/m^n$ 的线段 $I_{n,j}$ $(j = 1, \cdots, 2^{n-1})$，余下的部分 $E_n := I \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$ 是 $2^n$ 个相等的线段. 由归纳法即知已得到一个广义 Cantor 集 $E := \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} E_n$ (参看第七章 § 5. 2～3).

显然 $I\backslash E$ 是 $I$ 中一线段列 $\{I_{nj}|\ j=1,2,\cdots,2^{n-1};n=1,2,\cdots\}$. 取 $S\backslash E$ 的四个考贝 $S_i$, 将每个考贝沿（对应于 $I_{nj}$ 的线段）$I_{nj}^i=I_{nj}$ $(i=1,2,3,4)$ 裂开. 将此裂缝的上下两岸分别记为 $I_{nj}^{i+}$ 和 $I_{nj}^{i-}$.

若 $n$ 是偶数，则将 $I_{nj}^{1+}$ 和 $I_{nj}^{2}$ 粘合，将 $I_{nj}^{1-}$ 和 $I_{nj}^{2+}$ 粘合，将 $I_{nj}^{3+}$ 和 $I_{nj}^{4}$ 粘合，将 $I_{nj}^{3}$ 和 $I_{nj}^{4+}$ 粘合；若 $n$ 奇数，则将 $I_{nj}^{1+}$ 和 $I_{nj}^{2-}$ 粘合，将 $I_{nj}^{2+}$ 和 $I_{nj}^{3-}$ 粘合，将 $I_{nj}^{3+}$ 和 $I_{nj}^{4}$ 粘合，将 $I_{nj}^{4+}$ 和 $I_{nj}^{1-}$ 粘合，$j=1,2,\cdots,2^{n-1}$. 由此得一 $S\backslash E$ 的四叶完全覆盖面 $R$.

取 $m=3$, 则 $E$ 是零测集，故 $E\in N_D$, 所以 $R$ 是极大的.

特别说明，这里所用构造曲面的方法与以往不同之处在于构造出的曲面不含任何支点.

## 6. 本性极大 Riemann 曲面

**定义 6** 设 $R$ 是一可延拓的 Riemann 曲面. 若存在 $R$ 的一延拓 $R^*$ 使得 $R^*\backslash R$ 含有内点，称 $R$ 是可本性延拓的. 否则称 $R$ 是本性极大的.

由定理 4 容易得出下面定理 6.

**定理 6** 设 $R\cup\alpha$ 是一非紧的本性极大的镶边 Riemann 曲面. 如果 $R\cup\alpha$ 是 $w$-球 $K$ 的覆盖面，那么 $R\cup\alpha$ 是极大的充分必要条件是对于 $R\cup\alpha$ 的任意非紧子端 $\Omega\cap\eta$ 下面三者之一成立：

(i) $\sup n_{\pi|_\Omega}(w)=\infty$；

(ii) $\Omega$ 至少包含 $\pi$ 的一个支点；

(iii) $\Omega$ 至少包含 $\pi$ 的 ppl-渐近点的极限点，

其中 $\pi$ 是 $R$ 映入 $K$ 的投影映照.

这里顺便指出，§3 定理 3 是本定理充分性的一特殊情形，因为该定理中的曲面必属于 $O_G$ 类，而任一 $O_G$ 类曲面必为本性极大的（参看第七章 §2 定理 9).

Renggli, H [1,2]讨论了开 Riemann 曲面本性极大延拓. 如果

用 $Z-N_X$ 表示极大 Riemann 曲面移去一 $X$-零集，那么有：

**定理 7**　开 Riemann 曲面 $R$ 不是极大的当且仅当 $R$ 是可本性延拓的或 $R$ 是 $Z-N_{SB}$ 型的.

**定理 8**　设 $R$ 是平面型而非闭球面 $K$ 的 Riemann 曲面. 则 $R$ 的极大延拓都共形等价当且仅当 $R$ 是 $K-N_{SB}$ 型的.

定理 8 对非平面型可延拓的 Riemann 曲面不成立. 事实上，Renggli, H [2]举例说明了存在 $Z-N_{SB}$ 型的可延拓的 Riemann 曲面，它的两个极大延拓不共形等价. 但却有

**定理 9**　设 $R$ 是非平面型可延拓的 Riemann 曲面. 则 $R$ 的极大延拓都共形等价当且仅当 $R$ 是 $Z-N_D$ 型的.

由定理 7 可得：本性极大的开 Riemann 曲面必为 $Z-N_{SB}$ 型的. Zhang, M. [1]指出

**定理 10**　开 Riemann 曲面 $R$ 是本性极大的当且仅当下面两条件之一成立：

(i) $R$ 是 $Z-N_{SB}$ 型的.

(ii) $R$ 的极大延拓都共形等价的.

# 第七章

# Riemann 曲面的分类

## § 1　$O_G$ 类开 Riemann 曲面

### 1.　零类 Riemann 曲面的包含关系

回忆第五章 § 1 和 § 3 中有关 Riemann 曲面的分类记号：$O_X$ 表示其上不存在非常数 $X$-函数的开 Riemann 曲面全体所成之族；$SO_X$ 表示相对子域 $\Omega$ 组成的类，其中的元素 $\Omega$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的一个好子域，且在 $\Omega\cup\partial\Omega$ 上不存在非常数的实部在 $\partial\Omega$ 上取值为 0 的 $X$-函数，其中 $X=HB$、$HD$、$HBD$、$AB$、$AD$、$ABD$.

本章将证明如下的包含关系：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & O_{HBD} & = & O_{HD} & \subset & O_{A^0D} & = & O_{A^0BD} & & O_{MD^*} \\
 & & & & & & \cup & & \cup & & & & \cap \\
O_G & \subset & O_{HP} & \subset & O_{HB} & \subset & O_{A^0B} & \subset & O_{AB} & \subset & O_{AD} & = & O_{ABD}
\end{array}
$$

其中 $O_{A^0B}$（对应地，$O_{A^0D}$、$O_{A^0BD}$）表示任一好子域都属于 $SO_{AB}$（对应地，$SO_{AD}$、$SO_{ABD}$）的开 Riemann 曲面.

显然 $O_{HP}\subset O_{HB}$，$O_{HB}\subset O_{AB}$，$O_{MD^*}\subset O_{AD}$. 其余的包含关系将一一给予证明. 最后在 § 5 中举例说明所有包含关系是严格的.

另外，还将证明相对子域类有如下的包含关系：

$$\begin{array}{ccc} SO_{HD} & = & SO_{HBD} \\ \cup & & \cap \\ SO_{HB} \subset SO_{AB} & \subset & SO_{AD} = SO_{ABD} \end{array}$$

## 2. 相对理想边界的调和测度

设 $R$ 是一开 Riemann 曲面，而 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 其穷尽，其中每个 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 对 $R$ 的非紧好子域 $\Phi$，可在每个 $\Phi\cap R_n$ 中选取一分支 $\Phi_n$ 使得 $\Phi_0\subset\Phi_1\subset\cdots\subset\Phi_n\to\Phi$.

记 $\Gamma_n^{(\Phi)}=\Gamma_n\cap\partial\Phi_n$，并设 $\omega_n(z,\Phi)$ 是 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 的关于 $\Phi_n$ 的调和测度. 则根据最大值原理可得 $\omega_{n+1}(z,\Phi)<\omega_n(z,\Phi)$. 于是据 Harnack 原理，有调和函数 $\omega(z,\Phi)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\omega_n(z,\Phi)=\omega(z,\Phi),$$

其收敛在 $\Phi$ 上是广义一致的. 将 $\omega(z,\Phi)$ 称为 $\Phi$ 的理想边界关于 $\Phi$ 的调和测度. 当 $\omega(z,\Phi)\equiv0$ 时，说 $\Phi$ 具有零(相对)理想边界，否则说 $\Phi$ 具有正(相对)理想边界.

**定理 1** 若 $\omega(z,\Phi)\not\equiv0$，则

$$\sup_{z\in\Phi}\omega(z,\Phi)=1.$$

**证** 假设命题不成立，则在 $\Phi$ 上 $\omega(z,\Phi)<\alpha$，其中 $0<\alpha<1$ 是常数. 根据最大值原理，在 $\Phi_n$ 上必有 $\omega_n(z,\Phi)\geqslant\frac{1}{\alpha}\omega(z,\Phi)$. 因此可得 $\omega(z,\Phi)\geqslant\frac{1}{\alpha}\omega(z,\Phi)$，故 $\alpha\geqslant1$. 与 $\alpha<1$ 矛盾. ▌

**定理 2** 设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 是开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽，其中每个 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成. 又设 $\omega_n(z)$ 是 $\Gamma_n$ 关于 $R_n\backslash R_0$ 的调和测度，$D[\omega_n]$ 是其在 $R_n\backslash R_0$ 上的 Dirichlet 积分. 记 $\omega(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(z)$. 若用 $D[\omega]$ 表示 $\omega(z)$ 在 $R_n\backslash R_0$ 上的 Dirichlet 积分，则

$$\lim_{n\to\infty} D[\omega_n] = D[\omega] = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds,$$

其中 $v$ 是 $\Gamma_0$ 关于 $R_n\backslash R_0$ 的内法向. 因此,

$$\lim_{n\to\infty} D[\omega_n] = 0 \quad \text{当且仅当} \quad R\in O_G.$$

**证**　由于在 $\Gamma_0$ 上 $\omega_n=0$, 根据 Green 公式,

$$D[\omega_n] = -\int_{\Gamma_n} \omega_n \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds = -\int_{\Gamma_n} \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds, \tag{1}$$

其中 $v$ 是 $\Gamma_0\cup\Gamma_n$ 关于 $R_n\backslash R_0$ 的内法向. 又由于 $\Gamma_0$ 是解析曲线, 而且在 $\Gamma_0$ 上 $\omega_n=0$, 则 $\omega_n$ 可以越过 $\Gamma_0$ 调和延拓之. 因而在 $\Gamma_0$ 上 $\frac{\partial\omega_n}{\partial v}\to\frac{\partial\omega}{\partial v}$. 容易看出 $D[\omega]\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} D[\omega_n]$, 于是可得

$$D[\omega] \leqslant \lim_{n\to\infty} D[\omega_n] = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds, \tag{2}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}0 \leqslant D_{R_n\backslash R_0}[\omega-\omega_n] &= D_{R_n\backslash R_0}[\omega] - 2D_{R_n\backslash R_0}[\omega,\omega_n] + D_{R_n\backslash R_0}[\omega_n] \\ &= D_{R_n\backslash R_0}[\omega] + 2\int_{\Gamma_n} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds \\ &= D_{R_n\backslash R_0}[\omega] - 2\int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds,\end{aligned}$$

所以 $D_{R_n\backslash R_0}[\omega] \geqslant 2\int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega_n}{\partial v}\,ds$. 令 $n\to\infty$ 得

$$D[\omega] \geqslant \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds.$$

根据式(2),　$D[\omega] = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\omega}{\partial v}\,ds$. ▌

类似于第三章 § 4.5 定理 8 的证明可得

**定理 3**　设 $G$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 上的一个非紧好子域. 则 $G\in SO_{HB}$ 当且仅当 $G$ 的理想边界具有零调和测度.

3. $O_G$ 类曲面子域的调和函数的最大值原理

第三章 § 4.2 中将全体不存在 Green 函数的开 Riemann 曲面组成之类记为 $O_G$. 从本段开始将详细讨论与其相关的一些性质.

**定理 4** (最大值原理) 设 $R\in O_G$, 而 $\Omega$ 是以 $\Gamma$ 为边界的 $R$ 的非紧好子域. 又设 $u(z)$ 是 $\Omega\cup\Gamma$ 上的有界调和函数. 如果在 $\Gamma$ 上 $m\leqslant u(z)\leqslant M$, 那么在 $\Omega$ 内 $m\leqslant u(z)\leqslant M$ 也成立. 特别, 若在 $\Gamma$ 上 $u\equiv 0$, 则在 $\Omega$ 内 $u\equiv 0$ 也成立.

**证** 假设存在一点 $z_0\in\Omega$ 使得 $u(z_0)=M+2\varepsilon$ ($\varepsilon>0$). 现在, 记 $\Delta=\{z|u(z)>M+\varepsilon\}$, 则在 $\Delta$ 的边界 $\partial\Delta$ 上 $u(z)=M+\varepsilon$.

设 $R_0\subset R_1\subset\cdots\subset R_n\to R$ 是 $R$ 的一个穷尽, 其中 $R_0\subset R\backslash\Delta$. 若在 $\Omega$ 内 $u(z)\leqslant K$ (=const.), 则由最大值原理

$$u(z)\leqslant K\omega_n(z)+M+\varepsilon,\quad \forall z\in\Delta\cap R_n,$$

其中 $\omega_n(z)$ 是 $R_n$ 的边界关于 $R_n\backslash R_0$ 的调和测度.

由于 $R\in O_G$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(z)=0$. 因此在 $\Delta$ 内 $u_n(z)\leqslant M+\varepsilon$. 矛盾. 所以在 $\Omega$ 内 $u(z)\leqslant M$.

类似可证在 $\Omega$ 内 $m\leqslant u(z)$. ▌

**推论** 设 $R\in O_G$, $\Omega$ 是 $R$ 的任一好子域. 则 $\Omega\in SO_{HB}$.

**定理 5** $O_G\subset O_{HB}$.

**证** 设 $R\in O_G\backslash O_{HB}$. 则 $R$ 上存在非常数 $HB$-函数 $w=u(z)$. 取 $z_1, z_2\in R$ 和数 $\alpha$ 使得 $u(z_1)>\alpha>u(z_2)$. 设 $\Phi=\{z|u(z)>\alpha, z\in R\}$, 则在 $\Phi$ 的边界 $\partial\Phi$ 上 $u(z)=\alpha$. 因此据定理 4, 在 $\Phi$ 内 $u(z)\equiv\alpha$. 矛盾. 故 $O_G\backslash O_{HB}=\varnothing$, 即 $O_G\subset O_{HB}$. ▌

**定理 6** $R\overline{\in}O_G$ 当且仅当 $R$ 上存在非常数单值连续的正上调和函数.

**证** 设 $R\overline{\in}O_G$, 而 $R_0$ 是 $R$ 上的一个单叶圆盘, $\Gamma_0$ 为其边界.

设 $\omega(z)$ 是 $R\backslash R_0$ 的理想边界调和测度，则在 $\Gamma_0$ 上 $\omega(z)=0$，而在 $R\backslash R_0\cup\Gamma_0$ 上 $0<\omega(z)<1$. 置

$$w(z)=\begin{cases}1, & \text{当 } z\in R_0;\\ 1-\omega(z), & \text{当 } z\in R\backslash R_0.\end{cases}$$

则 $w(z)$是 $R$ 上非常数连续正上调和函数.

反之，设 $R$ 上存在非常数连续正上调和函数 $w(z)$. 考虑满足下面两条件的函数 $\psi(z)$ 所成之族 $\mathscr{F}$：

1) 在 $R\backslash R_0$ 上 $\psi(z)$ 为连续正上调和的；

2) 在 $\Gamma_0$ 上 $\psi(z)\geqslant 1$.

显然 $\psi(z)\equiv 1\in\mathscr{F}$，则 $\mathscr{F}\neq\varnothing$. 置

$$u(z)=\inf_{\psi\in\mathscr{F}}\psi(z),\ z\in R\backslash R_0.$$

则 $0\leqslant u(z)\leqslant 1$，且根据第三章 § 3 定理 8，在 $R\backslash R_0$ 上 $u(z)$ 调和. 又 $\Gamma_0$ 的每一点存在垒，所以在 $\Gamma_0$ 上 $u(z)=1$. 即知 $u(z)\neq 0$.

记 $m=\inf\limits_{z\in\Gamma_0}w(z)>0$，则 $\dfrac{w(z)}{m}\in\mathscr{F}$. 故在 $R\backslash R_0$ 上 $\dfrac{w(z)}{m}\geqslant u(z)$. 因此若 $u\equiv 1$，则在 $R\backslash R_0$ 上 $w(z)\geqslant m$. 又因为在 $R_0$ 上 $w(z)$ 是上调和的且 $w(z)\geqslant m$，所以在 $R$ 上 $w(z)\geqslant m$. 因此 $w(z)$ 在 $\Gamma_0$ 上达最小值，故在 $R$ 上 $w(z)\equiv m$，矛盾. 由此可得 $u\not\equiv 1$，所以在 $R\backslash R_0$ 上 $0<u(z)<1$，而在 $\Gamma_0$ 上 $u(z)=1$. 据定理 5，$R\overline{\in}O_G$. ▌

**推论**　$O_G\subset O_{HP}$.

综合本段定理 4、定理 6 和第三章 § 4. 5 定理 8 可得：

**定理 7**　设 $R$ 是一开 Riemann 曲面，则下面四个论断等价：

(i) $R\in O_G$;

(ii) $R$(相对某个正则子区域)的理想边界的调和测度恒为 0；

(iii) $R$ 上不存在非常数单值连续的正上调和函数；

(iv) $R$ 满足最大值原理：对于 $R$ 的任一非紧好子域 $\Omega$，记其边界为 $\Gamma$，对于 $\Omega\cup\Gamma$ 上的任一有界调和函数 $u(z)$，若在 $\Gamma$ 上有

$m \leqslant u(z) \leqslant M$，则在 $\Omega$ 内也有 $m \leqslant u(z) \leqslant M$.

**定理 8** （最大值原理） 设 $R \in O_G$，而 $\Phi$ 是以 $\Gamma$ 为边界的 $R$ 的非紧好子域，又设 $u \in HD(\Phi \cup \Gamma)$，若在 $\Gamma$ 上 $m \leqslant u(z) \leqslant M$，则在 $\Phi$ 内也有 $m \leqslant u(z) \leqslant M$.

**证** 首先证明若在 $\Gamma$ 上 $u(z)=0$，则在 $\Phi$ 内也有 $u(z)=0$. 设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $R$ 的一个穷尽，其中 $R_0$ 是 $R$ 上的单叶圆盘. 记 $R_n$ 的边界为 $\Gamma_n$. 又设 $\omega_n(z)$ 是 $\Gamma_n$ 关于 $R_n \backslash R_0$ 的调和测度，而 $\bar{\omega}_n(z)$ 是它的共轭调和函数. 置

$$d_n = \int_{\Gamma_0} \mathrm{d}\bar{\omega}_n = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \omega_n}{\partial v} \mathrm{d}s > 0, \tag{1}$$

其中 $v$ 为 $\Gamma_0$ 关于 $R_n \backslash R_0$ 的内法向. 由于 $R \in O_G$，故 $\omega_n > \omega_{n+1} \to 0$，从而 $d_1 > d_2 > \cdots > d_n \to 0$. 因此，若设 $\mu_n = 2\pi / d_n$，则

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n \to \infty. \tag{2}$$

如果置

$$u_n(z) = \mu_n \omega_n(z), \quad v_n(z) = \mu_n \bar{\omega}_n(z), \tag{3}$$

那么

$$\int_{\Gamma_0} \mathrm{d}v_n = 2\pi. \tag{4}$$

现设 $\Omega_\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant \mu_n)$ 是 $R_n \backslash R_0$ 的子曲面，使得在其上 $0 \leqslant u_n(z) \leqslant \lambda$. 记 $\Phi_\lambda = \Phi \cap (\Omega_\lambda \cup R_0)$. 又设 $C_\lambda$ 是等位线 $\{z \mid u_n(z) = \lambda\}$，而 $C_\lambda^{(\Phi)}$ 是其包含在 $\Phi$ 中的部分.

假设 $u \not\equiv 0$，则由于在 $\Gamma$ 上 $u=0$，故得

$$D(\lambda) := D_{\Phi_\lambda}[u] = \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u \frac{\partial u}{\partial v} \mathrm{d}s = \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u \frac{\partial u}{\partial u_n} \mathrm{d}v_n > 0, \tag{5}$$

其中 $v$ 为 $C_\lambda^{(\Phi)}$ 关于 $\Phi_\lambda$ 的外法向. 另外

$$D(\lambda) = \int_0^\lambda \mathrm{d}\lambda \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial u_n} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial v_n} \right)^2 \right) \mathrm{d}v_n + \text{const.},$$

因此 $D'(\lambda) = \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial u_n} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial v_n} \right)^2 \right) \mathrm{d}v_n$. 由 (5) 可得

$$D^2(\lambda) \leqslant \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u^2 \mathrm{d}v_n \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} \left(\frac{\partial u}{\partial u_n}\right)^2 \mathrm{d}v_n \leqslant D'(\lambda) \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u^2 \mathrm{d}v_n.$$

因而若置　$m(\lambda) = \int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u^2 \mathrm{d}v_n$，　则

$$D^2(\lambda) \leqslant m(\lambda) D'(\lambda). \tag{6}$$

又由于在 $\Gamma$ 上 $u=0$，故

$$m'(\lambda) = 2\int_{C_\lambda^{(\Phi)}} u \frac{\partial u}{\partial u_n} \mathrm{d}v_n = 2D(\lambda) > 0. \tag{7}$$

由此可见 $m(\lambda)$ 是 $\lambda$ 的增函数.

由(7)得 $m''(\lambda)=2D'(\lambda)$. 根据(6)，由于 $m'(\lambda)>0$，可得

$$\frac{m'(\lambda)}{m(\lambda)} \leqslant 2\frac{m''(\lambda)}{m'(\lambda)}. \tag{8}$$

两边积分得

$$m(\lambda) \leqslant k[m'(\lambda)]^2,\ k = m(0)/[m'(0)]^2 = m(0)/4[D(0)]^2,$$

再次由 (6)、(7) 得

$$\mathrm{d}\lambda \leqslant 4k\ \mathrm{d}D(\lambda).$$

两边关于$[0,\mu_n]$积分得

$$\mu_n \leqslant 4k[D(\mu_n) - D(0)] < 4kD(\mu_n). \tag{9}$$

但根据假设 $D(\mu_n)$ 有界且 $\mu_n \to \infty$，由此得到矛盾，从而

$$u(z) \equiv 0, \quad \forall z \in \Phi.$$

关于一般情形简单地证明如下.

假设存在一点 $z_0 \in \Phi$ 使 $u(z_0) > M+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$)，并设 $\Omega$ 是使得 $u(z)>M+\varepsilon$ 成立的 $\Phi$ 的子曲面且在 $\Omega$ 的边界上 $u=M+\varepsilon$. 因此若将上面的结果用于 $u-(M+\varepsilon)$，则在 $\Omega$ 内 $u=M+\varepsilon$. 矛盾. 所以在 $\Omega$ 内部 $u(z)\leqslant M$. 类似可得在 $\Phi$ 内 $u(\zeta)>M$. ▌

**定理** 9　$O_G \subset O_{HD}$.

**证**　设 $R \overline{\in} O_{HD}$，则 $R$ 上存在非常数 $HD$-函数 $f$. 如果 $f$ 有界，那么 $R \overline{\in} O_{HB}$. 根据定理 5，必有 $R \overline{\in} O_G$. 如果 $f$ 无界，根据定

理 8，必有 $R\overline{\in}O_G$. ▌

4. $O_G$ 类和非 $O_G$ 类曲面的覆盖面

**定理 10** 设 $R\overline{\in}O_G$，而 $\tilde{R}$ 是 $R$ 的正则覆盖面，则 $\tilde{R}\overline{\in}O_G$.

**证** 设 $\Delta_0$ 是 $R$ 上的一单叶圆盘，而 $\Gamma_0$ 为其边界圆周. 又设 $\omega(z)$ 是 $R$ 的理想边界 $\beta$ 关于 $R\setminus\Delta_0$ 的调和测度，则 $\omega(z)\neq 0$，且在 $\Gamma_0$ 上 $\omega(z)=0$.

将 $\tilde{R}$ 覆盖在 $\Delta_0$ 上的全体半岛记为 $\{\Delta_i\}$. 现在在 $\Phi:=\tilde{R}\setminus\bigcup_i\Delta_i$ 上定义函数 $u(\tilde{z})=\omega(z)$，其中 $z$ 是 $\tilde{z}\in\Phi$ 在 $R$ 上的投影. 显然 $u(\tilde{z})$ 是 $\Phi$ 上的非常数有界调和函数，且在 $\tilde{R}$ 覆盖在 $\Gamma_0$ 上的曲线上取值 0. 根据定理 4，$\tilde{R}\overline{\in}O_G$. ▌

**定理 11** 设 $\Phi_i(i=1,2)$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的两个不交非紧子曲面，其边界 $\Gamma_i$ 分别由至多可数条(紧或非紧的)解析曲线组成. 如果在 $\Phi_i$ 上分别存在着非常数单值有界调和函数 $u_i$ 使得在 $\Gamma_i$ 上 $u_i=0$，那么 $R\overline{\in}O_{HB}$，从而 $R\overline{\in}O_G$.

**证** 将 $u_i=0$ 除于一常数即可假设在 $\Phi_i$ 内 $|u_i(z)|<1$ 且

$$\sup_{z\in\Phi_1}u_1(z)=1,\qquad \inf_{z\in\Phi_2}u_2(z)=-1.$$

设 $\{R_n\}$ 是 $R$ 的一个穷尽，而 $\Gamma_n$ 为 $R_n$ 的边界. 记 $\Gamma_n^{(\Phi_i)}$ 是 $\Gamma_n$ 包含于 $\Phi_i$ 之中的部分. 又设 $v_n(z)$ 是 $R_n$ 的 Dirichlet 问题的解，使得在 $\Gamma_n^{(\Phi_1)}$ 上 $v_n=u_1$；在 $\Gamma_n^{(\Phi_2)}$ 上 $v_n=u_2$；在 $\Gamma_n\setminus\Gamma_n^{(\Phi_1)}\cup\Gamma_n^{(\Phi_2)}$ 上 $v_n=0$.

显然在 $R_n$ 上 $|v_n(z)|\leqslant 1$. 因此从 $\{v_n(z)\}$ 中可选一收敛子列，仍记为 $\{v_n(z)\}$，并置

$$\lim_{n\to\infty}v_n(z)=v(z).$$

那么在 $R$ 上 $v(z)$ 为调和且 $|v(z)|\leqslant 1$.

根据最大值原理，在 $R_n\cap\Phi_1$ 上 $v_n(z)\geqslant 2u_1(z)-1$，则在 $R\cap\Phi_1$ 上 $v(z)\geqslant 2u_1(z)-1$. 又因为 $\sup\limits_{z\in\Phi_1}u_1(z)=1$，所以 $\sup\limits_{z\in\Phi_1}v(z)\geqslant 1$. 类

似可得 $\inf\limits_{z\in\Phi_1} v(z)\leqslant -1$.

由上可知 $v(z)\not\equiv$const.，因此 $R\overline{\in}O_{HB}$. ▌

**定理** 12　设 $R$ 是覆盖在复 $z$-球面 $K$ 上的 Riemann 曲面，又设 $\Delta$ 为 $K$ 上的圆盘 $O(a,\rho)$. 若 $R$ 不覆盖 $\Delta$ 的任何点、或在 $\Delta$ 上 $R$ 有一半岛 $\Omega_\rho$ 不覆盖 $\Delta$ 的一个正容集，则 $R\overline{\in}O_{HB}$，故 $R\overline{\in}O_G$.

因此，若 $R\in O_G$，则除 $\Delta$ 的一零容集外 $\Omega_\rho$ 覆盖 $\Delta$ 所有点.

**证**　如果 $R$ 不覆盖 $\Delta$ 的任何点，那么 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-a}\right)$ 是一非常数单值有界调和函数，故 $R\overline{\in}O_{HB}$，从而 $R\overline{\in}O_G$.

下面设 $R$ 覆盖在 $\Delta$ 上有一半岛 $\Omega_\rho$ 不覆盖 $\Delta$ 的一正容集 $E$，则显然 $E$ 是闭集. 若记 $\Gamma$ 为 $E$ 的外边界，则 $\gamma(\Gamma)=\gamma(E)>0$. 故可取两点 $a_1$、$a_2\in\Gamma$ 和一足够小的正数 $\rho_0$ 使得两圆盘 $\Delta_i=O(a_i,\rho_0)$ $(i=1,2)$ 都包含于 $\Delta$ 中而且互不相交；还可使得每个 $\Gamma_i:=\Gamma\cap\Delta_i$ 都是正容集. 设 $D_i$ 是 $\Delta_i\backslash\Gamma_i$ 中边界包含 $a_i$ 的分支，则 $D_i$ 的边界有两部分：一是 $\Gamma_i$，二是圆周 $\{z\mid |z-a_i|=\rho_0\}$ 的一些子弧段组成之子集 $C_i$. 设 $u_i(z)$ 是 $D_i$ 的 Dirichlet 问题的解，使在 $C_i$ 上 $u_i(z)=0$，在 $\Gamma_i$ 上 $u_i(z)=1$. 由于 $\gamma(\Gamma_i)>0$，则 $u_i\not\equiv 0$.

设 $\Phi_i$ 是覆盖在 $D_i$ 上方 $\Omega_\rho$ 的一个连通片. 如果将 $u_i(z)$ 考虑作 $\Phi_i$ 上的非常数单值有界调和函数，那么盖在 $C_i$ 上 $\Phi_i$ 的边界部分上 $u_i(z)=0$. 于是根据定理 11，$R\overline{\in}O_{HB}$，从而 $R\overline{\in}O_G$. ▌

### 5.　$O_G$ 类曲面的可正则穷尽性

第七章 § 4. 4. 将给出 $O_G$ 类曲面的正则链判别法. 为此必须引入 Ahlfors 意义下可正则穷尽的概念.

设开 Riemann 曲面 $R$ 是 $z$-球面 $K$ 的覆盖面，若 $R$ 可被一列相对紧子曲面 $\{R_n\}$ 所穷尽，其中

$$R_0\subset\overline{R}_0\subset\cdots\subset R_n\subset\overline{R}_n\subset R_{n+1}\subset\overline{R}_{n+1}\to R,$$

且 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成并使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{|R_n|}=0,$$

其中 $L_n$ 表示 $\Gamma_n$ 的长度；$|R_n|$ 表示 $R_n$ 的球面面积，则称 $R$ 在 Ahlfors 意义下是可正则穷尽 的.

**定理** 13　若 $R\in O_G$，则 $R$ 在 Ahlfors 意义下是可正则穷尽的.

**证**　设 $R$ 是 $z$-球面 $K$ 的覆盖面，并设 $\{R_n\}$ 是 $R$ 的一个穷尽，而 $R_n$ 的边界为 $\Gamma_n$. 采用定理 8 证明中的记号 $u_n(z)$、$v_n(z)$、$\mu_n$. 并置

$$\zeta=e^{u_n+iv_n}=re^{i\theta},\ r=r(z)=e^{u_n(z)},\ \theta=\theta(z)=v_n(z).\qquad(1)$$

为方便，在下面的证明中用 $r,\theta$ 分别表示 $r(z),\theta(z)$.

如果置 $r_n=e^{\mu_n}$，那么 $1<r_1<r_2<\cdots<r_n\to\infty$.

设 $C_n^{(r)}:r(z)=\text{const.}=r(1\leqslant r\leqslant r_n)$ 是 $r(z)$ 的等位线，则以 $C_n^{(r)}$ 和 $\Gamma_0$ 为边界的区域 $R_n^{(r)}$ 是 $R_n\backslash R_0$ 的一紧子曲面，并且

$$\int_{C_n^{(r)}}d\theta=\int_{C_n^{(r)}}dv_n=\int_{\Gamma_0}du_n=2\pi.\qquad(2)$$

设 $A(r)$ 是 $R_n^{(r)}$ 的球面面积，而 $L(r)$ 是 $C_n^{(r)}$ 在球面上的长度，即

$$A(r)=\iint_{R_n^{(r)}}\left(\frac{|z'|}{1+|z|^2}\right)^2 rdrd\theta,\quad L(r)=\int_{C_n^{(r)}}\frac{|z'|}{1+|z|^2}d\theta,$$

其中 $z'=\frac{dz}{d\zeta}$. 因此根据 Schwarz 不等式和式(2)

$$L^2(r)\leqslant 2\pi r\frac{dA(r)}{dr}.\qquad(3)$$

i)首先设 $\lim\limits_{n\to\infty}A(r_n)=\infty$.

若对任意 $r(\sqrt{r_n}\leqslant r\leqslant r_n)$ 有 $L(r)>A(r)^{3/4}$，则由 (3) 得

$$\frac{1}{2}\log r_n=\int_{\sqrt{r_n}}^{r_n}\frac{dr}{r}=2\pi\int_{\sqrt{r_n}}^{r_n}\frac{dA(r)}{(A(r))^{3/2}}\leqslant\text{const.}\ (n\to\infty),$$

这与 $r_n\to\infty$ 矛盾. 因此存在一 $\tau_n(\sqrt{r_n}\leqslant\tau_n\leqslant r_n)$ 使得

$$L(\tau_n) > [A(\tau_n)]^{3/4}. \tag{4}$$

设 $D_n$ 是使得 $\sqrt{r_n} \leqslant r \leqslant r_n (r - r(z))$ 成立的 $R_n \backslash R_0$ 的子曲面，则由 $\log r = u_n(z) = \mu_n \omega_n(z)$，$\log r_n = \mu_n$ 得 $\omega_n(z) = \log r / \log r_n = \mu_n$，故

$$\frac{1}{2} \leqslant \omega_n(z) \leqslant 1, \quad \forall z \in D_n.$$

又因为在任一 $R_n \backslash R_0$ 的紧子曲面上 $\omega_n(z) \to 0$，故当 $n \to \infty$ 时 $D_n$ 趋于 $R$ 的理想边界．因此，由假设可得 $A(\tau_n) \to \infty$．再根据 (4)，必有 $L(\tau_n)/A(\tau_n) \to 0$．从而在本条件下定理得证．

ii) 如果 $A(r_n) \leqslant M(=\text{const.})(n=1,2,\cdots)$，那么

$$\int_{\sqrt{r_n}}^{r_n} \frac{L^2(r)}{r} \mathrm{d}r \leqslant 2\pi A(r_n) \leqslant 2\pi M,$$

因此存在一 $\tau_n (\sqrt{r_n} \leqslant \tau_n \leqslant r_n)$ 使得 $L(\tau_n) \to 0$，从而

$$L(\tau_n)/A(\tau_n) \to 0 \quad (n \to \infty). \ \blacksquare$$

### 6. $U$-类函数

设 $w = f(z)$ 是单位圆盘 $\Delta_0 := \{z \mid r < 1, z = re^{i\theta}\}$ 内的正则函数，若当 $z$ 沿圆盘内的以某点 $e^{i\theta}$ 为顶点的任一 Stolz(角形)区域趋于 $e^{i\theta}$ 时，$\lim\limits_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ 存在，则称该极限为 $f(z)$ 的角形边值或非切边值，并记为 $f(e^{i\theta})$．众所周知，开圆盘 $\Delta_0$ 内的有界解析函数 $f(z)$ 的角形边值 $f(e^{i\theta})$ 在圆周 $\{z \mid |z| = 1\}$ 上几乎处处存在．如果 $\Delta_0$ 内的正则函数 $w = f(z)$ 满足 $\sup\limits_{|z|<1} |f(z)| < 1$，且其角形边值在单位圆周上几乎处处为 $f(e^{i\theta}) = 1$，则说 $f(z)$ 是 $U$-类函数，记为 $f(z) \in U$．若 $\Delta_0$ 内的正则函数 $w = f(z)$ 满足 $\sup\limits_{|z|<1} |f(z)| < 1$，且使得 $\frac{1}{\rho}(f(z) - a) \in U$，则记为 $f(z) \in U_\rho(a)$．

**定理 14**　设 $R \in O_G$ 是覆盖在 $z$-球面 $K$ 的覆盖面．对球 $K$ 上

的圆盘 $\Delta:=O(a_0,\rho)$，设 $R_\rho$ 是 $R$ 覆盖在 $\Delta$ 上的一个连通分支(岛或半岛)，

(i) 如果 $z=\varphi(\zeta)$ 是将 $R_\rho$ 的万有覆盖面共形映上 $\{\zeta||\zeta|<1\}$ 的映照，那么 $\varphi(\zeta)\in U_\rho(a_0)$.

(ii) 设 $a$ 是 $\Delta$ 的任意一点且被 $R_\rho$ 覆盖 $n(a)$ 次，置

$$n_0=\sup_{a\in\Delta}n(a).$$

若 $n_0<\infty$，则除一零容集外 $\Delta$ 的每一点都被 $R_\rho$ 覆盖 $n_0$ 次.

(iii) 设 $a$ 是 $K$ 的任意一点且被 $R$ 覆盖 $n(a)$ 次，置

$$n_0=\sup_{a\in K}n(a).$$

若 $n_0<\infty$，则除一零容集外 $K$ 的每一点都被 $R$ 覆盖 $n_0$ 次.

**证**　(i)不妨设 $R_\rho$ 是非紧的. 根据 Fatou 定理，当 $\zeta:=re^{i\theta}$ 沿圆片 $\{\zeta||\zeta|<1\}$ 内的非切方向趋于 $e^{i\theta}$ 时，极限 $\lim\limits_{\zeta\to e^{i\theta}}\varphi(\zeta)$ 在圆周 $C:=\{\zeta||\zeta|=1\}$ 上几乎处处存在.

设 $R_\rho$ 的盖在球 $K$ 上的圆周 $\sigma_\rho:=\{z||z-a_0|=\rho\}$ 相对边界对应于圆周 $C$ 的开子集 $E$，记 $E'=C\setminus E$. 则 $E'$ 上的几乎处处的所有点都对应于 $R_\rho$ 的可达边界点. 现在可以看出对于某个使单位圆盘 $\{\zeta||\zeta|<1\}$ 不变的 Fuchs 群 $G$，$\varphi(\zeta)$ 是不变的.

假设 $mE'>0$，利用 Poisson 积分可知存在 $\{\zeta||\zeta|<1\}$ 上的调和函数 $v(\zeta)$，使得它在 $E'$ 上几乎处处等于 1，而在 $E$ 上等于 0. 则 $v(\zeta)\not\equiv0$. 由于 $E'$ 关于 Fuchss 群 $G$ 是不变的，如果置

$$u(z)=v\circ\varphi(z),$$

那么 $u(z)$ 是 $R_\rho$ 上的非常数单值调和函数，它在 $R_\rho$ 的覆盖在 $C$ 上的边界曲线部分上的边界值为 0. 根据最大值定理可得 $u(z)\equiv0$，矛盾. 因此 $mE'=0$，所以 $\varphi(\zeta)\in U_\rho(a_0)$.

其余部分由定理 12 和第五章 § 2 引理 4 即可证得. ▌

**注**　可以证明：若 $R$ 由无限叶组成，则除一零容集外 $K$ 的每一点都被 $R$ 覆盖无限多次. (参看 Tsuji, M [1] P. 329)

## § 2　Dirichlet 积分有限的函数

### 1.　相对子域类与曲面分类的关系

先证明 $O_{AB}$ 与 $O_{AD}$ 的包含关系.

**定理 1**　$O_{AB}\subset O_{AD}$.

**证**　设 $R\overline{\in}O_{AD}$. 于是 $R$ 上存在一非常数 $AD$-函数 $w=f(p)$. 记 $a=\inf\limits_{p\in R}\mathrm{Re}\,f(p)$、$b=\sup\limits_{p\in R}\mathrm{Re}\,f(p)$. 用 $l_\xi$ 表示复 $w$-球面 $K$ 上的直线 $\{w\in K\,|\,\mathrm{Re}w=\xi\}$. 设 $f(p)$的值域为 $E$, 并置 $l_\xi^*=E\cap l_\xi$, 显然 $l_\xi^*$ 关于 Lebesgue 测度 mes 是可测的. 根据 fubini 定理得

$$0<\iint_E \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\int_a^b\mathrm{d}\xi\int_{l_\xi^*}\mathrm{d}\eta=\int_a^b\mathrm{mes}(l_\xi^*)\,\mathrm{d}\xi\leqslant D_R[f]<+\infty,$$

其中 $w=\xi+\mathrm{i}\eta$. 于是存在一正数 $\xi_0$ 使得

$$0<\mathrm{mes}(l_{\xi_0}^*)<+\infty.$$

记 $l_{\xi_0}'=l_{\xi_0}\backslash l_{\xi_0}^*$, 则 $\mathrm{mes}(l_{\xi_0}')>0$. 根据第五章 § 1. 12 引理 8, $K\backslash l_{\xi_0}'$ 存在非常数 $AB$-函数 $\varphi(w)$. 又 $K\backslash l_{\xi_0}'=(K\backslash l_{\xi_0})\cup E\supset E$, 故

$$F(p):=\varphi\circ f(p)$$

就是 $R$ 上的非常数 $AB$-函数. 于是 $R\overline{\in}O_{AB}$. ▌

关系 $O_{AD}=O_{ABD}$ 是由日本数学家酒井良(Sakai, Makoto)于 1979 年给出的. 下面将直接采用它.

**定理 2**　设 $G$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的好子域, 其边界为 $\Gamma$. 则 $G$ 关于 $\Gamma$ 的双倍面 $\hat{G}\in O_X$ 的充分必要条件是 $G\in SO_X$(参看第五章 § 1), 此处 $X$ 表示 $AB$、$AD$、$ABD$ 其中之一.

**证**　仅就有界解析函数（即 $AB$ 函数）的情形进行讨论．将 $G$ 关于 $\Gamma$ 的双倍面记为 $\hat{G}$．分别用 $\tilde{G}$ 和 $\tilde{p}$ 表示 $G$ 和 $p\in G$ 的对称象．

充分性．假设 $G\cup\Gamma$ 上不存在其实部在 $\Gamma$ 上取值 0 的非常数单值有界解析函数，而 $w=f(z)$ 是 $\hat{G}$ 上的单值有界解析函数，则

$$F_1(p):=f(p)-\overline{f(\tilde{p})}\quad 和\quad F_2(p):=\frac{1}{i}\left(f(p)+\overline{f(\tilde{p})}\right)$$

是 $G$ 上的单值有界解析函数，且 $F_1$ 和 $F_2$ 的实部在 $\Gamma$ 上的每一点都取值 0．根据假设，$F_1$ 和 $F_2$ 皆为常数．记

$$k_1=f(p)-\overline{f(\tilde{p})}\quad 和\quad k_2=f(p)+\overline{f(\tilde{p})},$$

则 $k_1$ 和 $k_2$ 都不依赖于点 $p\in G$．故 $f(p)=(k_1+k_2)/2$ 也是常数．

必要性见关于解析函数延拓的对称原则．▌

由定理 2、定理 1 和关系式 $O_{AD}=O_{ABD}$ 即得

**推论**　$SO_{AB}\subset SO_{AD}$，$SO_{AD}=SO_{ABD}$；　$O_{A^0B}\subset O_{A^0D}$，$O_{A^0D}=O_{A^0BD}$．

## 2.　相对曲面类 $SO_{HB}$ 和 $SO_{HD}$

**定理 3**　$SO_{HD}=SO_{HBD}$．

**证**　只要证 $SO_{HD}\supset SO_{HBD}$ 即可．为此设 $\Phi\in SO_{HD}$，其边界记为 $\gamma$，则 $\Phi\cup\alpha$ 上存在非常数调和函数 $u(z)$ 使其 Dirichlet 积分有限，即 $D_\Phi[u]<\infty$ 且在 $\alpha$ 上 $u=0$．

现将 $\Phi$ 共形嵌入一 Riemann 曲面 $F$，比如 $\Phi$ 沿 $\alpha$ 的双倍面．设 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $F$ 的一穷尽，其中每个 $F_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成，且 $F_0\subset\Phi$．置 $\Phi_n=\Phi\cap F_n$．记 $\gamma_n$ 是 $\gamma$ 的包含在 $F_n$ 中的那个部分，而 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 是 $\Gamma_n$ 的包含在 $\Phi$ 中的那个部分．在 $F_0$ 内选取两点 $a$、$b$ 使得 $u(a)\neq u(b)$．

设 $w_n=w_n(z,a)$ 是 $\Phi_n$ 上的调和函数使得在 $\gamma_n$ 上 $w_n=0$，而在 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 上 $\dfrac{\partial w_n}{\partial v}=\dfrac{\partial g_n(z,a)}{\partial v}$（混合边界值问题的解），其中 $g_n(z,a)$ 是 $\Phi_n$ 的 Green 函数，而 $v$ 是关于 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 的内法向．若置

$$\chi_n(z,a) = g_n(z,a) - w_n(z,a), \tag{1}$$

则 $\chi_n(z,a)$ 满足下面条件：

a) 除 $a$ 点外，$\chi_n(z,a)$ 在 $\Phi_n$ 内调和.

b) $\chi_n(z,a) - \log\dfrac{1}{|z-a|}$在 $a$ 点处调和；

c) 在 $\gamma_n$ 上 $\chi_n = 0$，而在 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 上 $\dfrac{\partial \chi_n}{\partial \nu} = 0$.

类似地，可以定义 $w_n(z,b)$，$\chi_n(z,b)$. 置

$$\left.\begin{aligned} g_n(z;a,b) &= g_n(z,a) - g_n(z,b) \\ \chi_n(z;a,b) &= \chi_n(z,a) - \chi_n(z,b) \\ &= g_n(z;a,b) + w_n(z,b) - w_n(z,a) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$v_n(z) = \chi_n(z;a,b) - g_n(z;a,b) = w_n(z,b) - w_n(z,a). \tag{3}$$

则 $v_n(z)$ 在 $\Phi_n$ 内调和，且在 $\gamma_n$ 上 $v_n=0$. 根据假设，在 $\gamma_n$ 上 $u=0$，而在 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 上 $\dfrac{\partial \chi_n}{\partial \nu}=0$. 故根据 Green 公式，

$$\left.\begin{aligned} D_{\Phi_n}[u,v_n] &= \int_{\Gamma_n^{(\Phi)}} u\frac{\partial v_n}{\partial \nu}\,ds = \int_{\Gamma_n^{(\Phi)}} u\frac{\partial g_n(z;a,b)}{\partial \nu}\,ds \\ &= \int_{\Gamma_n^{(\Phi)}\cup\gamma_n} u\frac{\partial g_n(z;a,b)}{\partial \nu}\,ds = 2\pi[u(a)-u(b)] \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

类似地，如果 $m \geqslant n$，则

$$D_{\Phi_n}[v_m, v_n] = 2\pi[v_m(a) - v_n(b)] = D_{\Phi_m}[v_m], \tag{5}$$

所以

$$\left.\begin{aligned} 0 &\leqslant D_{\Phi_n}[v_m - v_n] = D_{\Phi_n}[v_m] - 2D_{\Phi_n}[v_m, v_n] + D_{\Phi_n}[v_n] \\ &\leqslant D_{\Phi_m}[v_m] - 2D_{\Phi_m}[v_m] + D_{\Phi_n}[v_n] - D_{\Phi_n}[v_n] - 2D_{\Phi_m}[v_m], \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$D_{\Phi_m}[v_m] \leqslant D_{\Phi_n}[v_n] \quad (m \geqslant n). \tag{7}$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v_n]$ 存在. 故由(6)可得

$$\lim_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v_m - v_n] = 0 \quad (m \geqslant n). \tag{8}$$

由于 $D_{\Phi_n}[v_n] \leqslant D_{\Phi_1}[v_1]$，且在 $\gamma_n$ 上 $v_n=0$，故可从 $\{v_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 中选一

子列，仍记为 $\{v_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$，使得极限 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(z)=v(z)$ 存在，且其收敛在 $\Phi$ 内是广义一致的. 那么 $v(z)$ 在 $\Phi$ 内是调和的，且在 $\gamma$ 上 $v=0$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z,a)=g(z,a)$ 存在，其中 $g(z,a)$ 是 $\Phi$ 的 Green 函数，而且在 $\gamma$ 上 $g=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(z;a,b)=g(z,a)-g(z,b)$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}[g_n(z;a,b)-v_n(z)]=\lim_{n\to\infty}\chi_n(z;a,b)=\chi(z;a,b) \tag{9}$$

存在，且

$$v(z)=\chi(z;a,b)-g(z;a,b). \tag{10}$$

从式(5)、(8)可得 $D_{\Phi_n}[v,v_n]=\lim\limits_{m\to\infty} D_{\Phi_n}[v_m]$ 和

$$0=\lim_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v-v_n]=\lim_{n\to\infty}(D_{\Phi_n}[v]-2D_{\Phi_n}[v,v_n]+D_{\Phi_n}[v_n]).$$

所以 $$D_\Phi[v]=\lim_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v]=\lim_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v_n], \tag{11}$$

$$|D_{\Phi_n}[u,v-v_n]|\leqslant\sqrt{D_{\Phi_n}[u]D_{\Phi_n}[v-v_n]}$$

$$\leqslant\sqrt{D_\Phi[u]D_{\Phi_n}[v-v_n]}\to 0\ (n\to\infty).$$

因此 $D_\Phi[u,v]=\lim\limits_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[u,v]=\lim\limits_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[u,v_n]$. 根据式(4)，

$$D_\Phi[u,v]=2\pi[u(a)-u(b)]\neq 0.$$

从而 $v\not\equiv 0$. 从式(11)可得 $D_\Phi[v]=\lim\limits_{n\to\infty} D_{\Phi_n}[v]\leqslant D_{\Phi_1}[v_1]<\infty$.

又因为在 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 上 $\frac{\partial\chi_n}{\partial\nu}=0$，所以 $\chi_n$ 在 $\Phi_n\backslash F_0$ 沿 $\Gamma_n^{(\Phi)}$ 的双倍上是调和的. 另，因为在 $\gamma_n$ 上 $\chi_n=0$，故 $\max\limits_{\Phi_n\backslash F_0}|\chi_n(z;a,b)|$ 在 $\Gamma_0$ 上达到，从而 $\max\limits_{\Phi\backslash F_0}|\chi(z;a,b)|$ 在 $\Gamma_0$ 上达到. 因为 $g(z;a,b)$ 在 $\Phi\backslash F_0$ 上有界，所以 $v(z)=\chi(z;a,b)-g(z;a,b)$ 在 $\Phi\backslash F_0$ 上有界. 最后，由于 $v(z)$ 在 $F_0$ 内调和，故是 $\Phi$ 上的有界调和函数，且在 $\gamma$ 上 $v=0$ 并有 $D_\Phi[v]<\infty$. ▌

**推论** $SO_{HB}\subset SO_{HBD}=SO_{HD}$.

**定理 4** 对于相对边界为紧致的子曲面类，$SO_{HB}=SO_{HD}$.

**证**　设 $\Phi\overline{\in}SO_{HB}$，其相对紧致边界为 $\gamma$. 现将 $\Phi$ 共形嵌入一 Riemann 曲面 $F$ 使 $F\backslash\Phi$ 为紧致. 设 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}(F_0-\Phi)$ 是 $F$ 的一个穷尽. 根据§1定理2，$\Phi$ 的相对理想边界的调和测度 $\omega$ 满足

$$D[\omega]=\int_{\gamma}\frac{\partial\omega}{\partial\upsilon}\mathrm{d}s,$$

其中 $\omega$ 是 $D[\omega]$的 Diriclet 积分，而 $\upsilon$ 是 $\gamma$ 关于 $\Phi$ 的内法向. 由 $\gamma$ 为紧致即得 $D[\omega]<\infty$. 根据第三章§4.4定理7，$\omega$ 是非常数的. 于是 $SO_{HB}\supset SO_{HD}$. 最后根据定理3的推论，$SO_{HB}=SO_{HD}$. ▌

### 3.　$O_{A^0B}$ 和 $O_{A^0D}$ 类曲面

**定理 5**　$O_{A^0B}\subset O_{AB}$　(对应地，$O_{A^0D}\subset O_{AD}$).

**证**　设 $R\overline{\in}O_{AB}$(对应地，$O_{AD}$). 于是 $R$ 上存在非常数 $AB$-(对应地，$AD$-) 函数 $w=f(p)$. 任取一点 $p_0\in R$，如果记 $a=\mathrm{Re}\,f(p_0)$、$G:=\{w|\mathrm{Re}w>a\}$、$G':=\{w|\mathrm{Re}w<a\}$、那么 $f^{-1}(G)$ 或 $f^{-1}(G')$ 中必有非紧分支 $\Delta$ 使得在其边界 $\gamma$ 上 $\mathrm{Re}f=a$. 显然 $F(p):=f|_{\Delta}-a$ 是 $\Delta$ 上的非常数 $AB$-(对应地，$AD$-)函数，且在其边界 $\gamma$ 上满足条件 $\mathrm{Re}F(p)=0$，从而 $R\overline{\in}O_{A^0B}$(对应地，$O_{A^0D}$). ▌

**定理 6**　　$O_{HB}\subset O_{A^0B}$.

**证**　设 $R\overline{\in}O_{A^0B}$. 则 $R$ 上存在一个好子域 $G$，记其边界为 $\Gamma$，使得 $G\cup\Gamma$ 上存在一非常数 $AB$-函数 $w=f(p)$，其实部在 $\Gamma$ 上恒取值0. 记 $M=\sup\limits_{p\in G\cup\Gamma}|f(p)|<\infty$. 设 $F_G$ 是定义在区域 $G$ 上的函数 $w=f(p)$ 所产生的覆盖在复 $w$-球面 $K$ 上的 Riemann 曲面. 则 $F_G$ 在球面 $K$ 上的投影必包含在圆盘$\{w||w|<M\}$之中. 对于任意 $\varepsilon>0$,在圆盘$\{w||w|<M+\varepsilon\}$内作两个足够小的圆盘 $\Phi_1$、$\Phi_2$ 使得：

1) $\Phi_1$ 与 $\Phi_2$ 互不相交；
2) $F_G$ 在 $w$-球面 $K$ 上的投影分别与 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 都相交；
3) $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的闭包分别与 $w$-球面的虚轴都不相交；
4) $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 都分别包含 $F_G$ 在 $w$-球面 $K$ 上的投影的外点.

根据条件 4)，分别可在 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 内作两个足够小的圆盘 $\Phi_1'$ 和 $\Phi_2'$ 使其与 $F_0$ 在 $K$ 上的投影都不相交. 记 $D_i=\Phi_i\backslash\bar{\Phi}_i'$，$i=1,2$. 设 $\omega_i$ 是 $D_i$ 内的调和函数，使其在 $\Phi_i$ 的边界圆周上取值 0，而在 $\Phi_i'$ 的边界圆周上取值 1，$i=1,2$.

根据条件 1)和 2)，有 $F$ 的两个不交半岛 $F_1$ 和 $F_2$ 分别覆盖在 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 之上. 由上述构造法可知 $F_1$ 和 $F_2$ 都是 $R$ 的好子域，其边界分别记为 $C_1$ 和 $C_2$. 根据条件 3)，$C_1$ 和 $C_2$ 与 $\Gamma$ 都不相交. 注意到 $C_1$ 和 $C_2$ 的边界分别覆盖在 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 的边界之上.

显然 $\omega_i\circ f(p)\in HB(F_i\cup C_i)$，且在 $C_i$ 上取值 0. 于是 $F_i\overline{\in} SO_{HB}$，$i=1,2$. 根据 § 1.4 定理 11，$R\overline{\in} O_{HB}$. ▌

### 4. $O_{HD}$ 和 $O_{HBD}$ 类曲面

**定理 7** 设 $\Phi_i(i=1,2)$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的两个不交非紧子曲面，其边界 $\gamma_i$ 分别由至多可数条(紧或非紧的)解析曲线组成. 若在 $\Phi_i$ 上分别存在着非常数单值调和函数 $u_i$ 使得在 $\gamma_i$ 上 $u_i=0$，且 $D_{\Phi_i}[u_i]<\infty$，则 $R\overline{\in} O_{HBD}$.

**证** 根据定理 3，不妨设 $u_i$ 在 $\Phi_i$ 上有界且 $|u_i(z)|<1$，及

$$\sup_{z\in\Phi_1} u_1(z)=1,\ \inf_{z\in\Phi_2} u_2(z)=-1. \tag{1}$$

设 $\{R_n\}$ 是 $R$ 的一个穷尽，而 $\Gamma_n$ 为 $R_n$ 的边界. 又记 $R_n^{(i)}=R_n\cap\Phi_i$ $(i=1,2)$. 在 $R_n$ 上定义连续函数 $w_n(z)$ 如下：

$$\left.\begin{aligned}&w_n(z)=u_1(z),\forall\, z\in R_n^{(1)};\quad w_n(z)=u_2(z),\forall\, z\in R_n^{(2)},\\&w_n(z)=0,\ \forall\, z\in R_n\backslash R_n^{(1)}\cup R_n^{(2)}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

则

$$\left.\begin{aligned}D_{R_n}[w_n]&=D_{R_n^{(1)}}[u_1]+D_{R_n^{(2)}}[u_2]\\&\leqslant D_{\Phi_1^{(1)}}[u_1]+D_{\Phi_2^{(2)}}[u_2]:=K<\infty.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

设 $v_n$ 是以 $w_n$ 在 $\Gamma_n$ 值为其边界值的 $R_n$ 上的 Dirichlet 问题之解，则根据 Dirichlet 原理有

$$D_{R_n}[v_n] \leqslant D_{R_n}[w_n] \leqslant K.$$

由于在 $R_n \cap \Phi_1$ 上 $v_n(z) \geqslant 2u_1$，故 $v_n(z)$ 与 § 1.4 定理 11 之证明中的 $v_n(z)$ 一样，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(z) = v(z)$ 存在，且其收敛在 $R$ 上为广义一致的. 由此可知 $v(z)$ 在 $R$ 上为调和、$v(z) \not\equiv \text{const.}$，且在 $R$ 上有 $|v(z)| \leqslant 1$ 和 $D_R[v] \leqslant K$. 因此 $R \overline{\in} O_{HBD}$. ▌

**定理 8** $O_{HD} = O_{HBD}$.

**证** 只要证明 $O_{HBD} \subset O_{HD}$.

设 $u(z)$ 是 $R$ 上的非常数单值调和函数，使得 $D_R[u] < \infty$. 又设有两点 $a, b \in R$ 使得 $u(a) < \alpha_1 < \alpha_2 < u(b)$. 记 $\Phi_1 = \{z \mid u(z) < \alpha_1\}$、$\Phi_2 = \{z \mid u(z) > \alpha_2\}$，则 $\Phi_i\ (i=1,2)$ 是 $R$ 的两个不交的子曲面. 显然在 $\Phi_i$ 的边界上 $u(z) = \alpha_i$，且有 $D_{\Phi_i}[u] < \infty\ (i=1,2)$. 故根据定理 7，$R \overline{\in} O_{HBD}$. ▌

**推论** $O_{HB} \subset O_{HBD} = O_{HD}$.

### 5. 与零容集等价的可去点集

第五章 § 1 给出可去集的概念及其自然的单调关系. 此处深入讨论之. 第四章 § 2.5 证明了零容集不含任何连续统、而在该章 § 4.2 证明了零容闭集必为 *HB*-可去集. 更有：

**定理 9** 设 $E$ 是平面全不连通紧致集，则下面各论断等价：

(i) $E$ 是零容集；

(ii) $E$ 是 *HB*-可去集；

(iii) $E$ 是 *HBD*-可去集.

(iv) $E$ 是 *HD*-可去集.

**注** 此处只给出(i)和(iii)等价性的证明，原因是：尽管(iv)→(iii)是显然的，但其逆论证较复杂(见定理 13)，为此必须引入主函数的概念，有关证明见下面第 6 9 段.

**证** (i)→(ii)见第四章§4.2定理2，而(ii)→(iii)是显然的.

(iii)→(i). 首先,根据第五章§1.2引理2，对任意$a\in E$,存在$a$的(单连)解析 Jordan 邻域$U_a$使其边界与$E$不交.

其次假设集$E$的容量$\gamma(E)>0$. 于是至少存在一个上述的邻域$U$使得$\gamma(E\cap U)>0$，其边界记为$\alpha$. 现将$U$的对称区域$U^*$与$U\backslash E$沿$\alpha$按对称关系粘合成一曲面$F$，则$F$上存在 Green 函数. 与定理4的证明相同，适当选取$F$的列$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得$F_0=U^*$，即可使$F$关于理想边界的调和测度$\omega$是$F\backslash U^*$上非常数有界调和函数，且$D[\omega]<\infty$. 于是$E$不是$HBD$-可去. ▌

### 6. 通量

设$G$是 Riemann 曲面$R$的一正则区域，其边界$\gamma$按关于$G$的正向定向. 考虑一紧致镶边 Riemann 曲面$W$，将其边界围道分为内部边界和外部边界两部分，分别记为$\alpha$和$\beta$，即$\alpha$和$\beta$关于$W$分别是正向和反向的. 设$u$是$W$上的调和函数. 积分

$$\int_\beta {}^*\mathrm{d}u$$

称为$u$关于$W$的(外)边界通量. 显然有$\int_\beta {}^*\mathrm{d}u=\int_\alpha {}^*\mathrm{d}u$.

**引理 2** 设$\omega$是紧致镶边 Riemann 曲面$W$上的调和函数，使得在$\alpha$上$\omega=0$、在$\beta$上$\omega=1$. 则$W$上的任一调和函数$u$关于$W$的边界通量满足关系

$$\left(\int_\beta {}^*\mathrm{d}u\right)^2\leqslant D[u]D[\omega].$$

**证** 记$d=\int_\beta {}^*\mathrm{d}u$，即$u$关于$W$的边界的通量. 为证结论，不妨设$d>0$，并记$v=u\cdot D[\omega]/d$. 只需证$D[\omega]\leqslant D[v]$. 显然$v$与$\omega$有同样的通量，故

$$D[\omega,v-\omega]=\int_{\beta-\alpha}\omega(\,{}^*\mathrm{d}v-{}^*\mathrm{d}\omega)=0.$$

因此 $D[v]=D[\omega]+D[v-\omega]$，即得 $D[\omega]\leqslant D[v]$. ▮

设 $u$ 是定义在 Riemann 曲面 $R$ 某紧致集 $E$ 外的调和函数. 根据第三章 § 3 定理 16，$R$ 存在穷尽列. 设 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一穷尽，记 $R_n$ 的边界为 $\Gamma_n$. 若将 $R$ 的理想边界记为 $\beta$，则

$$\int_{\beta}{}^*\mathrm{d}u:=\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}{}^*\mathrm{d}u$$

称为 $u$ 关于理想边界 $\beta$ 的通量. 上述概念将在下面起重要作用.

## 7. 主函数

设 $R_1$ 是 Riemann 曲面 $R$ 的紧致镶边子曲面的余集，其边界 $\alpha_1$ 是紧致的. 规定 $\alpha_1$ 的正方向使其关于 $R_1$ 是正向的. 现定义与 $R_1$ 相关的线性算子 $L$ 如下：对 $\alpha_1$ 上的有界连续函数 $f$，$Lf$ 定义为 $\overline{R}_1:=R_1\cup\alpha_1$ 上的连续函数、在 $R_1$ 内调和并满足条件：

$$Lf|\alpha_1=f,\tag{1}$$

$$\min f\leqslant Lf\leqslant\max f,\tag{2}$$

$$\int_{\alpha_1}{}^*\mathrm{d}Lf=0.\tag{3}$$

在条件(3)中，${}^*\mathrm{d}Lf$ 在 $\alpha_1$ 上未必存在，但可理解为当 $\alpha\to\alpha_1$ 时积分 $\int_{\alpha}{}^*\mathrm{d}Lf$ 的极限，其中 $\alpha$ 是 $R_1$ 内同调于 $\alpha_1$ 的曲线. 由于 $Lf$ 在 $R_1$ 内调和，故 $\int_{\alpha}{}^*\mathrm{d}Lf$ 与 $\alpha$ 的选取无关，从而上述的说明是合理的. 将算子 $L:f\mapsto Lf$ 称为正规算子. 当然这里假设满足上述条件的函数 $Lf$ 是存在的(参看下一段的算子 $L_0$、$L_1$).

**定理 10**　设 $s$ 是定义在 $\overline{R}_1$ 上的有限连续函数、且在 $R_1$ 内调和. 那么 $R$ 上存在调和函数 $p$ 使得

$$(p-s)|\overline{R}_1=L((p-s)|\alpha_1)\tag{4}$$

的充分必要条件是

$$\int_{\alpha_1} {}^*\mathrm{d}s = 0. \tag{5}$$

其中函数 $p$ 在相差一常数的意义下是唯一的，且 $p$ 退缩为常数当且仅当 $s=L(s|\alpha_1)$.

函数 $p$ 称为对应于$(s,L,R_1)$的<u>主函数</u>，而 $s$ 称为<u>奇性函数</u>.

**证**　式(5)的必要性是显然的. 只要证充分性. 为此，设 $R_0$ 是包含 $R\backslash R_1$ 的正则区域，即 $R_0$ 是紧致区域且其边界 $\alpha_0$ 为有限条不交的解析 Jordan 曲线. 规定 $\alpha_0$ 的正方向使其关于 $R_0$ 是正向的.

定义一个与 $R_0$ 相关的线性算子 $T$ 如下：对 $\alpha_0$ 上的有界连续函数 $f$，定义 $Tf$ 为 $\overline{R}_0:=R_0\cup\alpha_0$ 上的连续函数、在 $R_0$ 内调和，且使得 $Tf|\alpha_0=f$. 置 $Kf=L(Tf)$，或精确地应是 $Kf=L(Tf|\alpha_1)$. 记

$$s_0 = s - Ls.$$

则 $K^n s_0=L(TK^{n-1}s_0)$，$n=1,2\cdots$.

设 $\omega$ 是一在 $R_0\cap R_1$ 内调和、在$\overline{R_0\cap R_1}$上的连续的函数，且在 $\alpha_1$ 上 $\omega=0$、在 $\alpha_0$ 上 $\omega=1$. 下面证明对所有自然数 $n$ 都有

$$\int_{\alpha_1} TK^n s_0 {}^*\mathrm{d}\omega = 0. \tag{6}$$

置 $u=TK^n s_0-K^n s_0$. 根据 Green 公式

$$\int_{\alpha_0}(u\ {}^*\mathrm{d}\omega - \omega\ {}^*\mathrm{d}u) = -\int_{\alpha_1}(u\ {}^*\mathrm{d}\omega - \omega\ {}^*\mathrm{d}u).$$

根据(3)、(5)，$\int_{\alpha_0} {}^*\mathrm{d}u = 0$. 又因为在 $\alpha_0$ 上 $u=0$、在 $\alpha_1$ 上 $\omega=0$，所以

$$\int_{\alpha_1} u\ {}^*\mathrm{d}\omega = 0. \tag{7}$$

将 $Ts_0-s_0$ 代入式(7)的 $u$，并考虑到在 $\alpha_1$ 上 $s_0=0$，故

$$\int_{\alpha_1} Ts_0 {}^*\mathrm{d}\omega = \int_{\alpha_1} s_0 {}^*\mathrm{d}\omega = 0.$$

又由于在 $\alpha_1$ 上 $K^n s_0 - L(TK^{n-1}s_0) = TK^{n-1}s_0$，因此，若在式(7)中取 $u = TK^n s_0 - K^n s_0$，则得

$$\int_{\alpha_1} TK^n s_0 {}^* d\omega = \int_{\alpha_1} TK^{n-1} s_0 {}^* d\omega = 0.$$

从而式(6)得证.

设 $\mathscr{F}$ 是定义在 $\bar{R}_0$ 上的满足下面条件的函数族：每个元素 $v$ 都是 $\bar{R}_0$ 上的有界连续函数、在 $R_0$ 内调和并使得

$$\int_{\alpha_1} v \, {}^* d\omega = 0.$$

由式(6)知 $TK^n s_0 \in \mathscr{F}$. 下面证明存在一常数 $q \in (0,1)$，使得

$$\max_{\alpha_1} |v| \leqslant q \max_{\alpha_0} |v|, \quad \forall\, v \in \mathscr{F}. \tag{8}$$

只需考虑 $v \neq 0$ 的元素. 假设式(8)不成立，则必存在一个函数列 $\{v_n\} \subset \mathscr{F}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} (\max\limits_{\alpha_1} |v_n| / \max\limits_{\alpha_0} |v_n|) = 1$. 记 $u_n = v_n / \max\limits_{\alpha_0} |v_n|$，那么 $u_n \in \mathscr{F}$，且在 $\bar{R}_0$ 上 $|u_n| \leqslant 1$. 于是存在一 $\bar{R}_0$ 上的调和函数 $u$ 使得 $\{u_n\}$ 有子列在 $\bar{R}_0$ 上收敛于 $u$. 由于

$$\int_{\alpha_1} u \, {}^* d\omega = \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_1} u_n {}^* d\omega = 0,$$

且在 $\alpha_1$ 上 ${}^* d\omega < 0$，故 $u$ 不可能保持不变号. 但

$$\max_{\alpha_1} |u| = \lim_{n\to\infty} \max_{\alpha_1} |u_n| = 1.$$

根据极大值原理，在 $\bar{R}_0$ 上 $|u| \equiv 1$，从而 $u$ 是常数. 这与 $u \in \mathscr{F}$ 矛盾，于是式(8)成立.

由式(8)可得

$$\max_{\alpha_1} |TK^{n-1}s_0| \leqslant q \max_{\alpha_0} |TK^{n-1}s_0| = q \max_{\alpha_0} |K^{n-1}s_0|$$

对任意 $n = 1, 2, \cdots$，由式(2)可得

$$\max_{\alpha_0} |TK^n s_0| = \max_{\alpha_0} |L(TK^{n-1}s_0)| \leqslant \max_{\alpha_1} |TK^{n-1}s_0|.$$

因此 $\max\limits_{\alpha_0} |TK^n s_0| \leqslant q \max\limits_{\alpha_0} |TK^{n-1}s_0|$. 应用上式递推可得

$$\max_{\alpha_0}|TK^n s_0| \leqslant q^n \max_{\alpha_0}|s_0|. \tag{9}$$

现在在 $\alpha_0$ 上定义函数

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n s_0.$$

由式(8)可知 $\varphi$ 在 $\alpha_0$ 上是有界连续且 $K\varphi=\varphi-s_0$. 因此在 $\alpha_0$ 上

$$\varphi - K\varphi = s - Ls.$$

于是若在 $\alpha_1$ 上置 $f=T\varphi$, 则在 $\alpha_0$ 上有 $\varphi-Lf=s-Ls$, 即

$$\varphi - s = L(f-s) \quad (\text{在 } \alpha_0 \text{ 上}).$$

现在, 在 $R$ 上定义函数 $p$ 使得

$$p|R_0 = T\varphi,$$

$$p|R_1 = Lf + s - Ls.$$

上面的定义是合理的, 这是因为在 $\alpha_0$ 上

$$T\varphi - (Lf + s - Ls) = (\varphi - s) - L(f - s) = 0,$$

而在 $\alpha_1$ 上 $T\varphi-(Lf+s-Ls)=f-f-s+s=0$, 因此在 $R_0\cap R_1$ 上有 $T\varphi=Lf+s-Ls$. 由此可得 $p$ 是 $R$ 上的调和函数且在 $R_1$ 上

$$L(p-s) = L(Lf - Ls) = L(f-s) = p - s,$$

也就是说 $p$ 满足式(4).

最后设 $p$ 和 $p'$ 是满足式(4)的两个解. 关系 $L(p-p')=p-p'$ 说明函数 $p'':=p-p'$ 在 $\alpha_1$ 上取到极大值, 故 $p''$ 为常数. 类似地, $Ls=s$ 蕴含 $Lp=p$, 为此 $p$ 必定为常数. ▌

### 8. 算子 $L_0$ 和 $L_1$

设 $R_1$ 如前所述, 而 $\Omega\subset R_1$ 是 $R$ 的相对紧致正则区域, 其边界为 $\alpha_1\cup\beta_\Omega$, 其中 $\beta_\Omega=\bigcup_j \beta_{j\Omega}$, 而这些 $\beta_{j\Omega}$ 恰是 $R_1\setminus\Omega$ 的分支之有限条互不相交的边界围道. 给定 $\alpha_1$ 上的函数 $f$ 如前, 记 $u_{0\Omega}$ 和 $u_{1\Omega}$ 为 $\Omega$ 上的调和函数, 其边界值如下: 在 $\alpha_1$ 上二者都为 $f$; 在 $\beta_{j\Omega}$ 上

$${}^*du_{0\Omega} = 0, \quad u_{1\Omega} = c_j = \text{const}.$$

使得 $\int_{\beta_{\Omega}} {}^*du_{1\Omega}=0$. 为方便，置

$$L_{0\Omega}f=u_{0\Omega},\quad L_{1\Omega}f=u_{1\Omega}.$$

根据 Green 公式，对 $\overline{\Omega}\subset\Omega'$ 和 $f\in C^1(\alpha_1)$

$$\left.\begin{aligned}&D_\Omega[L_{0\Omega'}f-L_{0\Omega}f]=D_\Omega[L_{0\Omega'}f]-D_\Omega[L_{0\Omega}f]\\&\leqslant D_{\Omega'}[L_{0\Omega'}f]-D_\Omega[L_{0\Omega}f]\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

和

$$D_\Omega[L_{1\Omega}f-L_{1\Omega'}f]\leqslant D_\Omega[L_{1\Omega}f]-D_{\Omega'}[L_{1\Omega'}f].\tag{2}$$

由式(2)可得 $u_1:=\lim\limits_{\Omega\to R_1}L_{1\Omega}f$ 存在，且有 $D_{R_1}[u_1]<\infty$ 和

$$\lim_{\Omega\to R_1}D_\Omega[L_{1\Omega}f-u_1]=0.$$

再次根据 Green 公式可得

$$D_\Omega[L_{1\Omega}f-L_{0\Omega}f]=D_\Omega[L_{1\Omega}f]-D_\Omega[L_{0\Omega}f].\tag{3}$$

式(3)和(1)给出 $u_0:=\lim\limits_{\Omega\to R_1}L_{0\Omega}f$ 的存在性、$D_{R_1}[u_0]<\infty$ 和

$$\lim_{\Omega\to R_1}D_\Omega[L_{0\Omega}f-u_0]=0.$$

由于 $C^1(\alpha_1)$ 在 $C(\alpha_1)$ 中一致稠密，故对任意 $f\in C(\alpha_1)$ 可定义

$$L_0f=\lim_{\Omega\to R_1}L_{0\Omega}f,\quad L_1f=\lim_{\Omega\to R_1}L_{1\Omega}f.\tag{4}$$

如果 $f\in C^1(\alpha_1)$，那么有 $D_{R_1}[L_if]<\infty$ 和

$$\lim_{\Omega\to R_1}D_\Omega[L_if-L_{i\Omega}f]=0.\tag{5}$$

容易看出算子 $L_i\,(i=0,1)$ 是正规算子.

## 9. 零容集的 $HD$-可去性

对应于 $HD$-可去集也有与定理 10 类似的结论，但必须验证正规算子的条件(3)成立，即验证函数关于曲域边界通量为 0. 虽然所述条件并非直观，但下面定理给出肯定的回答.

**定理** 11 设 $\beta$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 的理想边界. 则 $R\in O_G$ 当且仅当任意定义在 $\beta$ 邻域上的 $HD$-函数 $u$ 关于 $\beta$ 的通量为 0.

**证** 设 $\Omega_0$ 是 $R$ 的一正则子区域，其边界记为 $\Gamma_0$. 不妨设 $u$ 是定义在 $\Omega_0$ 的外面的 $HD$-函数. 又设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $R$ 的一穷尽列，其中 $R_1\supset\overline{\Omega}_0$，将 $R_n$ 的边界记为 $\Gamma_n$. 记 $\omega_n$ 为 $R_n\setminus\overline{\Omega}_0$ 上的调和测度，即 $\omega_n$ 是调和函数，且在 $\Gamma_n$ 上 $\omega_n=1$，而在 $\Gamma_0$ 上 $\omega_n=0$.

必要性. 由于 $R\in O_G$，故 $\omega_n\to\omega\equiv 0$ $(n\to\infty)$. 根据引理 2

$$\int_{\Gamma_n}{}^*\mathrm{d}u\leqslant D_{R_n\setminus\omega_0}[u]D_{R_n\setminus\omega_0}[\omega_n].$$

根据 § 1.2 定理 2，当 $n\to\infty$ 时，$D_{R_n\setminus\omega_0}[\omega_n]\to D_{R\setminus\omega_0}[\omega]=0$. 另由条件 $D_{R_n\setminus\omega_0}[u]\leqslant D_{R\setminus\omega_0}[u]<\infty$，$n=1,2,\cdots$，故

$$\int_{\Gamma_0}{}^*\mathrm{d}u=\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}{}^*\mathrm{d}u=0.$$

充分性. 假设 $R\overline{\in}O_G$. 则 $R$ 的理想边界的调和测度 $\omega$ 是正的. 根据 § 1.2 定理 2，$D_{R\setminus\omega_0}[\omega]$ 与 $\omega$ 关于 $R$ 的理想边界的通量相等，则必有限. 故 $\omega$ 是 $\Omega_0$ 外的 $HD$-函数. ▌

**定理 12** 设 $R$ 是一紧 Riemann 曲面，而 $E$ 是 $R$ 上的一平面型紧致真子集. 那么 $E$ 是 $HD$-可去当且仅当 $R\setminus E\in O_G$.

**证** 必要性. 假设 $E$ 是 $HD$-可去，但 $R\setminus E\overline{\in}O_G$. 根据第三章 § 4.5 定理 8，$R\setminus E$ 关于某正则子区域 $G$ 的理想边界的调和测度 $\omega\neq 0$. 记 $G$ 的边界为 $\Gamma$. 根据 § 1.2 定理 2，$D[\omega]=\int_{\Gamma}\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\mathrm{d}s<\infty$. 由所设，$\omega$ 可延拓成 $R\setminus G$ 上的 $HD$-函数. 但是，在 $\Gamma$ 上 $\omega=0$，故有 $\omega\equiv 0$. 矛盾. 从而 $R\setminus E\in O_G$.

充分性. 设 $R\setminus E\in O_G$. 若 $s$ 是 $E$ 的某平面型邻域 $G'$ 上的 $HD$-函数，则 $s$ 关于 $R\setminus E$ 的理想边界的通量等于 0. 取 $G'$ 的子开区域 $G$，使得 $\overline{G}\subset G'$，且其边界 $\Gamma$ 是有限条解析 Jordan 曲线.

现定义算子 $L_0$: $\mathrm{C}(\Gamma)\to HB(\overline{G})$ 如下，对 $\Gamma$ 上的任一实连续函数 $f$，定义 $L_0f$ 为 $f$ 在区域 $G$ 的 Diruchlet 问题之解. 显然 $L_0$ 是正则算子. 根据定理 10，存在 $R\setminus E$ 上的调和函数 $p$ 使得

$$p - s = L_0(p - s).$$

由于 $\sqrt{D_{G\setminus E}[p]} \leqslant \sqrt{D_{G\setminus E}[s]} + \sqrt{D_{G\setminus E}[L_0(p-s)]}$，故 $p$ 是 $R\setminus E$ 上的 $HD$-函数. 又因为 $O_G \subset O_{HD}$，所以 $p \equiv \text{const.}$，即得 $s = L_0(s)$. 于是 $s$ 可延拓成整个 $G$ 上的 $HD$-函数. ▌

由第四章 § 4.4 定理 8 可得

**定理** 13　设 $R$ 是一闭复 $z$-球面，而 $E$ 是 $R$ 的紧致真子集. 那么 $E$ 是 $HD$-可去当且仅当 $E$ 是零容集.

## 10.　复球面上的 $AD$-可去点集

**定理** 14　设 $E$ 是闭复 $z$-球面 $K$ 上的一紧致真子集. 那么 $E$ 是 $AD$-可去的（对应地，$ABD$-可去的）当且仅当 $K\setminus E \in O_{AD}$（对应地，$K\setminus E \in O_{ABD}$).

**证**　必要性是显然的.

充分性. 设 $K\setminus E \in O_{AD}$. 又设 $f$ 是定义在 $E$ 的某邻域 $U$ 上的 $AD$-函数（对应地，$ABD$-函数）. 现在，取一包含 $E$ 的开区域 $G$ 使得 $R\setminus G$ 是正则区域，且 $E \subset G \subset \overline{G} \subset U$，记 $G$ 的边界为 $\Gamma$.

记 $s = \mathrm{Re} f$，显然 $s$ 是 $HD$-函数且

$$\int_\Gamma {}^*\mathrm{d}s = 0. \tag{10}$$

取与定理 12 证明相同的算子 $L_0$，则存在 $K\setminus E$ 上的 $HD$-函数 $p$ 使得在 $G\setminus E$ 上有

$$p - s = L_0(p - s).$$

又由于 $\int_\Gamma {}^*\mathrm{d}L_0(p - s) = 0$，故可得 $\int_\Gamma {}^*\mathrm{d}p = 0$. 从而存在 $K\setminus E$ 上的 $AD$-函数 $F$ 使其以 $p$ 为实部. 但 $K\setminus E \in O_{AD}$，从而 $F \equiv \text{const.}$，进而 $p \equiv \text{const.}$，故 $s = L_0(s)$. 于是 $s$ 可延拓成整个 $G$ 上的 $HD$-函数.

同理可证 $f$ 的虚部也可延拓成整个 $G$ 上的 $HD$-函数. 从而 $f$ 可延拓成整个 $G$ 上的 $AD$-函数. ▌

**推论** $E$ 是 $AD$-可去集当且仅当 $E$ 是 $ABD$-可去集.

**证** 由 $O_{AD}=O_{ABD}$ 立即可得. ▌

### 11. 复球面上的 $AB$-可去点集

**定理 15** 设 $E$ 是一闭复 $z$-球面 $K$ 上的一紧致真子集. $E$ 是 $AB$-可去的当且仅当 $K\setminus E\in O_{AB}$.

**证** 与定理 14 的证明几乎完全相同. 不同之处仅是以相应的函数 $p$ 为实部 $K\setminus E$ 上的解析函数 $F$ 虽然存在, 但未必是 $AB$-函数. 为此只要用 $e^F$ 代替即可. 这是因为函数 $p$ 是有界的, 从而 $e^F$ 是 $AB$-函数. ▌

由定理 14、15 和定理 1 得到:

**推论** $AB$-可去集必为 $AD$-可去集.

做为上述推论的特殊情形, 第五章 §1.12 定理 8 已证明线性紧致集是 $AB$-可去必导致 $AD$-可去. 而且该章定理 9 及其推论还证明了: 线性紧致集是 $AB$-可去集当且仅当该集为零测集. 于是, 连同本节的定理 15 即可得

**定理 16** 设 $E$ 是复 $z$-球面 $K$ 上的解析曲线上的一紧致子集. 则下面三个论述等价:

(i) $E$ 是(Lebesgue)零测度集.

(ii) $E$ 是 $AB$-可去集.

(iii) $K\setminus E\in O_{AB}$.

### 12. 有限亏格开 Riemann 曲面的可去理想边界

设 $R$ 是有限亏格 $g$ 的开 Riemann 曲面, 而 $R_0$ 是 $R$ 的一个正则子区域, 使得 $R\setminus R_0$ 是平面型的, 且 $R_0$ 的相对边界 $\alpha_0$ 是连通的. 不妨设 $\alpha_0$ 是一解析 Jordan 曲线. 于是可将 $R\setminus R_0$ 共形映入闭单位圆盘 $\bar{U}$ 使得 $\alpha_0$ 与单位圆周 $T$ 相对应, 其中 $U=\{z\mid |z|<1\}$.

将 $R\setminus\overline{R}_0$ 在 $U$ 内的象记为 $G_0$，而将 $G_0$ 在 $U$ 内的内边界记为 $E$. 于是 $E$ 可看作是 $R$ 的理想边界的实现.

若 $E$ 是 $X$-可去集，则说 $R$ 具有 $X$-可去理想边界，或说 $R$ 具有 $X$-零理想边界，其中 $X=HB$、$HD$、$AB$、$AD$.

将 $\overline{U}$ 嵌入 $\overline{R}_0$，使得 $\overline{U}$ 的边界圆周 $T$ 之象与 $R_0$ 的边界 $\alpha_0$ 之对应点相粘合，所得的曲面 $R^*$ 是亏格为 $g$ 的紧 Riemann 曲面. 显然 $R\subset R^*$，而且 $R^*\setminus R$ 就是 $U\setminus G_0$ 在 $R^*$ 中的象. 为方便，将 $U$ 中点集与其在 $R^*\setminus\overline{R}_0$ 中的象视为恒同.

**定理 17**　设 $R$ 是具有有限亏格 $g$ 的开 Riemann 曲面，则 $R$ 具有 $AD$-可去理想边界当且仅当 $R\in O_{AD}$.

**证**　必要性显然.

充分性. 假设 $R$ 不具有 $AD$-可去理想边界，那么 $E$ 必含有无限个 $AD$-不可去点(参看第五章 § 1). 根据可去集的定义，只要考虑 $E$ 是全不连通紧致集即可. 在 $U$ 内取 $2g+1$ 个闭包互不相交的单连通解析 Jordan 开区域 $G_j'$，使其与 $E$ 之交 $E_j$ 都是非空 $AD$-不可去集，但其边界 $\alpha_j$ 不与 $E$ 相交. 置 $G_j=G_j'\setminus E$、$R_j^*=R^*\setminus E_j$，则 $G_j$ 是 $R_j^*$ 的理想边界之邻域，其中 $R^*$ 是本段开头所述者.

现在将 $G_j$ 沿边界 $\alpha_j$ 作双倍面 $\hat{G}_j$. 由于 $E_j$ 是 $AD$-不可去集，根据定理 14，$\hat{G}_j\overline{\in} O_{AD}$. 于是根据定理 2，$G_j\overline{\in} SO_{AD}$. 从而 $G_j\cup\alpha_j$ 上存在非常数 $AD$-函数 $f_j$ 其实部 $s_j:=\mathbf{Re}f_j$ 在单位圆周 $\alpha_j$ 上恒取值 0. 类似定理 14 的证明，运用算子 $L_0$ 于区域 $G_j$ 可知存在 $R_j^*$ 上的 $HD$-函数 $p_j$ 使得 $p_j-s_j=L_0(p_j-s_j)$. 因为在 $\alpha_j$ 上 $s_j=0$，而在 $G_j$ 上 $s_j\neq\text{const.}$，故在 $G_j$ 上 $p_j\neq\text{const.}$. 置

$$p=\sum_{j=1}^{2g+1}c_jp_j,$$

则 $p$ 是 $R$ 上的 $HD$-函数，而且 $p$ 是非常数的除非所有 $c_j$ 都为 0，$j=1,\cdots,2g+1$. 而且 $p$ 对 $R\setminus\overline{R}_0$ 内的任一闭链的周期都为 0. 设 $\gamma_k$ 是 $R$ 上的 $2g$ 个典型闭链，$k=1,\cdots,2g$，其中每个闭链都不分离

$R$. 考虑方程

$$\int_{\gamma_k} {}^*\mathrm{d}p = \sum_{j=1}^{2g+1}\left(\int_{\gamma_k} {}^*\mathrm{d}p_j\right)c_j = 0. \quad (k=1,\cdots,2g)$$

由于$\left(\int_{\gamma_1} {}^*\mathrm{d}p_j, \cdots, \int_{\gamma_k} {}^*\mathrm{d}p_j\right)$ $(j=1,\cdots,2g+1)$线性独立，故存在非0解$(c_1,\cdots,c_{2g+1})$. 其对应的函数 $p$ 在 $R$ 内的任一闭链都有周期0. 从而存在 $R$ 上的 $AD$-函数 $P$ 以 $p$ 为实部. 即得 $R\overline{\in} O_{AD}$. ▌

类似可证：

**定理** 18　设 $E$ 是具有有限亏格 $g$ 的开 Riemann 曲面 $R$ 具有 $AB$-可去理想边界当且仅当 $R\in O_{AB}$.

另外，由定理 9 和定理 12 立即推得：

**定理** 19　对亏格有限的 Riemann 曲面而言，

$$O_G = O_{HB} = O_{HD}$$

## §3　Lindelöf 性质*

### 1.　具有 Lindelöf 性质的曲面类

**定义** 1　设 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 如果对于 $R$ 的任一个好子域 $G$，设其边界为 $\Gamma$，对于任一个定义在 $G\cup\Gamma$ 上的 $AB$(对应地，$AD$、$ABD$)-函数 $f(z)$，$|f(z)|$ 在 $\Gamma$ 上恒等于正值常数 $M$ 蕴含着在 $G$ 内 $|f(z)|\leqslant M$ 成立，那么称 $R$ 具有 <u>$(L_B)$</u>(对应地，<u>$(L_D)$</u>、<u>$(L_{BD})$</u>)<u>-性质</u>.

**定理** 1　若开 Riemann 曲面 $R$ 具有$(L_B)$-性质，则 $R$ 上的任一

* 除定理 1、2 外，本节是作者的 80 年代的成果，参看 Qiu Shuxi [1,2,4].

半纯函数 $w=f(p)$ 都具有 Iversen 性质(参看第五章 § 2.6).

**证** 记 $D=f(R):=\{w=f(p)\mid p\in R\}$. 设复 $w$-球 $K$ 上的开圆盘 $G:=\{w\mid |w-w_0|<\rho\}$ 的边界圆周 $\partial G$ 与 $D$ 相交. 又设 $\Delta$ 是 $G$ 的逆象 $f^{-1}(G)$ 的任一个连通分支, 其相对边界记为 $\gamma$. 现在, 假设 $w_0\overline{\in}\overline{f(\Delta)}$, 则函数 $\varphi(p):=[f(p)-w_0]^{-1}\in AB(\Delta\cup\gamma)$, 而且在 $\gamma$ 上 $\varphi(p)=\dfrac{1}{\rho}$. 由于 $R$ 具有$(L_B)$-性质, 则在 $\Delta$ 内 $|f(p)-w_0|\geqslant\rho$. 矛盾. 于是可得 $w_0\in\overline{f(\Delta)}$. 由此可见 $D$ 的闭包 $\overline{D}$ 是完全的, 即整个复球面.

假设 $f(p)$ 不具有 Iversen 性质, 则存在一个 $w$-球上的圆盘 $U$ 使得 $f^{-1}(U)$ 有一分支 $V$ 使得 $U\backslash f(V)$ 包含一连续统 $\gamma$. 根据第五章 § 1 引理 1, 圆盘 $U$ 必包含一个圆心在 $\gamma$ 上的小圆盘 $U'$, 使得 $f^{-1}(U')$ 有一分支 $V'$ 是缺口半岛. 与上面证明矛盾. 从而 $f(p)$ 具有 Iversen 性质. ▍

**定理 2** $R\in O_{A^0B}$ 当且仅当 $R$ 具有 $(L_B)$-性质.

**证** 必要性. 设 $R$ 不具有 $(L_B)$-性质, 则 $R$ 上存在一个非紧的好子域 $\Delta$, 其相对边界为 $\gamma$, 且 $\Delta\cup\gamma$ 上存在一个非常数 $AB$-函数 $w=f(p)$ 使得在 $\gamma$ 上有 $|f(p)|=M=\text{const.}$, 但存在一点 $p_1\in\Delta$ 使 $|f(p_1)|>M$. 记 $N=\sup\limits_{\Delta}|f(p)|$. 显然, 复 $w$-平面上的开圆环域 $G:=\{w\mid\{w\mid M<|w|<N\}$ 在 $\Delta$ 内的逆象中包含 $p_1$ 的连通分支 $\Delta_1$ 是非紧的, 且为 $R$ 的一个好子域. 设其相对边界为 $\gamma_1$, 那么在 $\Delta_1$ 内有 $M<|f(p)|<N$, 而在 $\gamma_1$ 上有 $|f(p)|=M$.

利用映照 $W=\varphi(w)=\mathrm{i}\left(\dfrac{w}{M}+\dfrac{M}{w}\right)$ 可把圆周 $\{w\mid |w|=M\}$ 从 $w$-平面映上 $W$-平面的虚轴线段 $l$: $\mathrm{Re}\,W=0$, $-2\leqslant\mathrm{Im}\,W\leqslant2$; 同时把 $G$ 映成 $l$ 的外部. 显然复合函数 $W=\varphi\circ f(p)$ 是 $\Delta_1\cup\gamma_1$ 上的有界解析函数, 且在 $\gamma_1$ 上 $\mathrm{Re}\,\varphi\circ f(p)=0$. 于是 $R\overline{\in}O_{A^0B}$.

充分性. 设 $R\overline{\in}O_{A^0B}$. 则 $R$ 上存在一个非紧的好子域 $\Delta$, 其相

对边界为 $\gamma$，使 $\Delta\cup\gamma$ 上存在一个非常数 $AB$-函数 $w=f(p)$ 使得其实部 $u(p)$ 在 $\gamma$ 上取值 0. 不妨设在 $\Delta$ 内 $u(p)>0$，否则取满足此条件的子区域即可. 置 $w=e^{f(p)}$，显然 $e^{f(p)}$ 是 $\Delta\cup\gamma$ 上的非常数 $AB$-函数，但在 $\gamma$ 上 $|e^{f(p)}|=e^{u(p)}=1$，而在 $\Delta$ 内 $|e^{f(p)}|=e^{u(p)}>1$. 故 $R$ 不具有 $(L_B)$-性质. 充分性成立. ▌

**定理 3** 若 $R\in O_{A^0D}$，则 $R$ 具有 $(L_D)$-性质.

**证** 设 $R$ 不具有 $(L_D)$-性质，则 $R$ 必有一个相对边界为 $\gamma$ 的非紧好子域 $\Delta$，使得 $\Delta\cup\gamma$ 上存在一个非常数 $AD$-函数 $w=f(p)$ 满足条件：在 $\gamma$ 上有 $|f(p)|=M=\text{const.}$、但存在一点 $p_1\in\Delta$ 使得 $|f(p_1)|>M$. 显然，复 $w$-平面上的区域 $G:=\{w\,|\,|w|>M\}$ 在 $\Delta$ 内的逆象中必有一非紧连通分支 $\Delta_1$ 包含 $p_1$. 将 $\Delta_1$ 的相对边界记为 $\gamma_1$，注意 $\Delta_1$ 是 $R$ 的一个好子域，而且在 $\Delta_1$ 内 $|f(p)|>M$，在 $\gamma_1$ 上 $|f(p)|=M$.

取映照 $W=\varphi(w)=\mathrm{i}\left(\dfrac{w}{M}+\dfrac{M}{w}\right)$. 显然复合函数 $W=\varphi\circ f(p)$ 是 $\Delta_1\cup\gamma_1$ 上的解析函数，且在 $\gamma_1$ 上 $\mathrm{Re}\,\varphi\circ f(p)=0$.

由于 $\varphi'(w)=\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{M}-\dfrac{M}{w^2}\right)$ 在 $G$ 内是有界的，若用 $z=x+\mathrm{i}y$ 表示 $p$ 的局部坐标，则

$$\int_{\Delta_1}|(\varphi\circ f)'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Delta_1}|\varphi'|^2|f'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\text{const.}\,D_{\Delta_1}[f]<+\infty.$$

故 $\varphi\circ f$ 是 $\Delta_1\cup\gamma_1$ 上的非常数 $AD$-函数. 则 $R\overline{\in}O_{A^0D}$. ▌

**推论** 若 $R$ 具有$(L_B)$-性质，则必有$(L_D)$-性质.

**证** 因 $R$ 具有$(L_B)$-性质，则根据定理 2 有 $R\in O_{A^0B}$. 根据 § 2 定理 2 的推论，$R\in O_{A^0D}$. 再根据定理 3，$R$ 具有$(L_D)$-性质. ▌

**定理 4** $R\in O_{A^0BD}$ 当且仅当 $R$ 具有 $(L_{BD})$-性质.

**证** 必要性的证明与定理 2、定理 3 相似.

充分性. 设 $R\overline{\in}O_{A^0BD}$，则 $R$ 上存在一个非紧的好子域 $\Delta$，其相

对边界为 $\gamma$, 使 $\Delta\cup\gamma$ 上存在一个非常数 $ABD$-函数 $w=f(p)$ 使得其实部 $u(p)$ 在 $\gamma$ 上取值 0. 不妨设在 $\Delta$ 内 $u(p)>0$, 否则取满足此条件的子区域即可. 若用 $z=x+iy$ 表示 $p$ 的局部坐标, 则

$$D_\Delta[e^f]:=\int_\Delta e^{2u}|f'|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant \mathrm{const.}\, D_{\Delta_1}[f]<+\infty.$$

于是 $e^{f(p)}$ 是 $\Delta\cup\gamma$ 上的非常数 $ABD$-函数, 但在 $\gamma$ 上 $|e^{f(p)}|=1$, 而在 $\Delta$ 内 $|e^{f(p)}|=e^{u(p)}>1$. 故 $R$ 不具有 $(\mathrm{L_{BD}})$-性质. ▌

**定理 5** 若开 Riemann 曲面 $R$ 具有 $(\mathrm{L_D})$-性质 (对应地, $(\mathrm{L_{BD}})$-性质), 则 $R\in O_{AD}$ (对应地, $O_{ABD}$).

**证** 若 $R\overline{\in}O_{AD}$ (对应地, $O_{ABD}$), 则 $R$ 上存在一个非常数 $AD$-(对应地, $ABD$-)函数 $w=f(p)$. 任取一点 $p_0\in f(R)$. 只要 $\varepsilon>0$ 足够小, 区域 $G:=\{w\mid |w-f(p_0)|>\varepsilon\}$ 的逆象必存在非紧连通分支. 取其一记为 $\Delta$, 其相对边记为 $\gamma$. 令 $F(p)=f(p)-f(p_0)$, 则在 $\gamma$ 上 $|F(p)|=\varepsilon$, 而在 $\Delta$ 内有 $|F(p)|>\varepsilon$. 显然 $\Delta$ 是 $R$ 的好子域, 而 $F$ 是 $\Delta\cup\gamma$ 上的非常数 $AD$-(对应地, $ABD$-)函数. 故 $R$ 不具有 $(\mathrm{L_D})$-性质 (对应地, $(\mathrm{L_{BD}})$-性质. ▌

**推论** $O_{A^0D}\subset O_{AD}$, $O_{A^0BD}\subset O_{ABD}$.

**引理 1** 设 $w=f(p)$ 是开 Riemann 曲面 $R\in O_{A^0BD}$ 上的一个非常数半纯函数, $\Phi$ 是它所产生的盖在复球面上的 Riemann 曲面. 则对于任意的复数 $w_0$ (有限或无限) 和正数 $\rho$, $\Phi$ 盖在圆盘

$$G:=\{w\mid |w-w_0|<\rho\}$$

(当 $w_0=\infty$ 时考虑做 $\{w\mid |1/w|<\rho\}$)

上的任意一个缺口半岛都是无限叶的.

**证** 设 $\Phi_G$ 是覆盖在 $G$ 上的一个缺口半岛, 于是存在两个正数 $\eta>\varepsilon$ 和复数 $w'\neq\infty$ 使得圆盘 $G_0:=\{w\mid |w-w'|<\eta\}$ 包含在 $G$ 之中, 同时 $\Phi_G$ 不覆盖圆片 $G_0':=\{w\mid |w-w'|<\varepsilon\}$ 上任一点而至少覆盖 $G_0$ 的一点. 于是 $G_0$ 上必有一个缺口半岛 $\Phi_{G_0}\subset\Phi_G$ 满足上

述条件. 设 $\Phi_{G_0}$ 的逆象为 $\Delta$, 其相对边界 $\gamma$. 置

$$\varphi(p)=\frac{1}{f(p)-w'},\quad p\in\Delta\cup\gamma.$$

则由所设必有 $1/\eta\leqslant|\varphi(p)|\leqslant 1/\varepsilon$ 且 $\varphi(p)$ 是解析函数, 同时有

$$D_\Delta[\varphi]:=\int_\Delta\frac{|f(z)|^2}{|f(z)-w'|^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant D_\Delta[f]/\varepsilon^4,$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$ 为 $p$ 的局部坐标.

如果 $\Phi_0$ 是有限叶的, 则 $\Phi_{G_0}$ 也必是有限叶的. 但显然 $\Phi_{G_0}$ 的投影在圆片 $G_0$ 内, 则

$$D_\Delta[f]\leqslant\text{const}\cdot\pi\eta^2<\infty,$$

从而 $D_\Delta[\varphi]<\infty$. 故 $\varphi$ 是 $\Delta\cup\gamma$ 上的非常数 $ABD$-函数. 显然, 在 $\gamma$ 上 $|\varphi(p)|=1/\eta$, 但 $\Delta$ 内有 $|\varphi(p)|>1/\eta$. 故 $R$ 不具有 $(\mathrm{L}_{BD})$-性质. 据定理 4, $G\overline{\in}O_{A^0BD}$. 矛盾. ▌

**定理** 6 设 $w=f(p)$ 是 $R\in O_{A^0BD}$ 上的非常数单值半纯函数, 若它所产生的盖在复平面上的 Riemann 曲面 $\Phi$ 是有限叶的, 则 $f$ 具有 Iversen 性质.

**证** 设 $D$ 是 $\Phi$ 在 $w$-复球面 $K$ 上的投影. 假设 $f$ 不具有 Iversen 性质, 则 $K$ 上存在与 $D$ 相交的圆片 $G':=O(w_0,\rho')$ 使得 $f^{-1}(G')$ 中有一连通分支 $\Delta'$, 其投影关于 $G'$ 的余集 $G'\setminus f(\Delta')$ 包含一连续统 $\gamma$. 根据第四章 §1 引理 2, 存在点 $\gamma$ 的一边界 $w_1$ 和两个正数 $\delta<\rho(<\rho')$ 使得 $f^{-1}\{w\,|\,|w-w_1|<\rho\}$ 中有一连通分支 $\Delta$ 的投影 $f(\Delta)$ 覆盖不到 $G_0:=\{w\,|\,|w-w_0|<\delta\}$ 上任何点, 则 $\Phi_\Delta$ 是 $G$ 上一个缺口半岛, 据引理 1, 必为无限叶. 矛盾. ▌

**定理** 7 设 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 则下列各论点等价:

(i) $R\in O_{A^0D}$;

(ii) $R\in O_{A^0BD}$;

(iii) $R$ 具有 $(\mathrm{L}_D)$-性质;

(iv) $R$ 具有 $(\mathrm{L}_{BD})$-性质;

(v) 对于 $R$ 的任一好子域 $\Delta$，设其边界为 $\gamma$，对于任一非常数 $w=f(z)\in M(\Delta\cup\gamma)$，对于任一复 $w$-球面 $S$ 上的圆盘 $G$，如果条件 $f(\gamma)\cap G=\varnothing$ 和 $f(\Delta)\cap G\neq\varnothing$ 成立，那么 $f$ 限制在 $\Delta$ 上所产生的 Riemann 曲面 $\tilde{\Delta}_f$ 盖在 $G$ 上的每一个（如果存在）缺口半岛的球面面积都是无限的.

**证**　(i)⇆(ii) 见 § 2 定理 2 的推论. (ii)⇆(iv) 见定理 4. 显然(iii)→(iv)，而由定理 3 得 (i)→(iii). 只要再证(i)⇆(iv).

(v)→(i). 设 $R\overline{\in}O_{A^0BD}$. 根据定理 4，$R$ 不具有 ($L_{BD}$)-性质，即存在 $R$ 的一个好子域 $\Delta$，其边界为 $\gamma$，使得 $\Delta\cup\gamma$ 上有一非常数 $ABD$-函数 $f(p)$ 满足：(1) 在 $\gamma$ 上 $|f(p)|=M=\text{const.}$；(2) 存在一点 $p_1\in\Delta$ 使得 $|f(p_1)|>M$. 由于 $f(p)$ 有界，因此

$$M<\sup_{p\in\Delta}|f(p)|_{\cdot}=M'<\infty.$$

显然存在点 $w_0\in\overline{f(\Delta)}$ 使得 $|w_0|=M'$. 设 $G$ 是以 $w_0$ 为心以 $(M'-M)/2$ 为半径的圆盘，则 $G\cap f(\Delta)\neq\varnothing$，且 $G\cap f(\gamma)=\varnothing$. 由 $f$ 限制在 $\Delta$ 上所产生的 Riemann 曲面覆盖在圆盘 $G$ 上的部分至少有一连通分支 $\Phi$ 是缺口半岛. 但 $f$ 是 $ABD$-函数，因此 $\Phi$ 的面积有限，故球面面积亦有限，与已知条件矛盾.

(i)→(v). 设 $R$ 上存在一个好子域 $\Delta$，其边界为 $\gamma$，而且 $\Delta\cup\gamma$ 上有一非常数半纯函数 $w=f(p)$，使得对 $w$-平面的某个圆盘 $G$，由于 $f$ 限制在 $\Delta$ 上所产生的 Riemann 曲面 $\tilde{\Delta}_f$ 覆盖在 $G$ 上的部分有一缺口半岛 $\Phi_G$ 具有有限球面面积，故存在一点 $w_0\in G\setminus\{\infty\}$ 和两个足够小的正数 $\varepsilon<\eta$，使得以 $w_0$ 为心分别以 $\varepsilon$ 和 $\eta$ 为半径的同心圆盘 $G_\varepsilon$ 和 $G_\eta$ 满足条件：$G_\eta\cap f(\Delta)\neq\varnothing$ 和 $G_\varepsilon\cap f(\Delta)=\varnothing$. 因为 $\infty\overline{\in}G_\eta$，所以 $\tilde{\Delta}_f$ 覆盖在 $G_\eta$ 上的部分有一缺口半岛 $\Phi_{G_\eta}$ 具有有限球面面积. 将 $\Phi_{G_\eta}$ 关于 $f$ 在 $\Delta$ 上的逆象记为 $\Delta_\eta$，其边界为 $\gamma_\eta$. 显然 $\Delta_\eta$ 是 $R$ 的非紧好子域. 置

$$g(p)=\frac{1}{f(p)-w_0},\quad p\in\Delta_\eta\cup\gamma_\eta.$$

则
$$1/\eta \leqslant |g(p)| \leqslant 1/\varepsilon, \quad p \in \Delta_\eta \cup \gamma_\eta; \tag{1}$$
$$g(p) = 1/\eta, \quad p \in \gamma_\eta, \tag{2}$$
而且至少存在一点 $p_0 \in \Delta_\eta$ 使得
$$|g(p_0)| > 1/\varepsilon. \tag{3}$$
另一方面，$g$ 是 $\Delta_\eta$ 上的 $AD$-函数. 事实上，
$$\left.\begin{aligned} D_{\Delta_\eta} &:= \int_{\Delta_\eta} \frac{|f'(z)|^2}{|f(z) - w_0|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^4} \int_{\Delta_\eta} |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{[1 + (\eta + |w_0|)^2]^2}{\varepsilon^4} \int_{\Delta_\eta} \frac{|f'(z)|^2}{(1 + |f(z)|^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\leqslant \frac{[1 + (\eta + |w_0|)^2]^2}{\varepsilon^4} D^*_{\Delta_\eta}[f] \\ &\leqslant \frac{[1 + (\eta + |w_0|)^2]^2}{\varepsilon^4} D^*_{\Delta}[f] < +\infty, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$
其中 $z=x+iy$ 为 $p$ 的局部座标. 由 (1)、(2)、(3)和(4)得知 $R$ 不具 ($L_{BD}$)-性质，故 $R \overline{\in} O_{A^0BD}$. ▌

## 2. 关于 $O_{A^0D}$ 类曲面的修正 Stoïlow 原理及其逆

**引理 2** 设 $R \in O_{A^0D}$，$\Omega$ 是 $R$ 的一个非紧好子域，其边界为 $\alpha$. 而 $w=f(p)$ 是 $\Omega \cup \alpha$ 上的一个非常数半纯函数. 又设 $G$ 是复 $w$-平面上满足条件 $G \cap f(\Omega) \neq \varnothing$ 和 $G \cap f(\alpha) = \varnothing$ 的单连通区域. 如果 $f^{-1}(G) := \{p \mid f(p) \in G\}$ 有一个分支 $\Delta$ 使得 $G \backslash f(\Delta)$ 不是 $AD$-可去的，那么
$$\sup_{w \in G} n_{f|_\Delta}(w) = +\infty,$$
其中 $n_{f|_\Delta}$ 是价函数，而 $f|_\Delta$ 是 $f$ 在 $\Delta$ 上的限制.

**证** 设 $E = G \backslash f(\Delta)$. 将 $G$ 和 $f(\Delta)$ 的公共边界记为 $\sigma$. 现在将 $f(\Delta)$ 沿 $\sigma$ 的双倍记为 $F_\Delta$. 由于 $E$ 不是 $AD$-可去，故 $F_\Delta \overline{\in} O_{AD}$. 所

以 $f(\Delta)\overline{\in}SO_{AD}$. 于是 $f(\Delta)$ 上存在非常数 $AD$-函数 $\varphi(w)$，其实部在 $\sigma$ 上取值 0. 显然 $\Delta$ 是 $R$ 的非紧好子域，记其边界为 $\gamma$. 又复合函数 $\varphi\circ f(p)$ 是 $\Delta\cup\gamma$ 上的解析函数，其实部在 $\gamma$ 上取值 0. 如果

$$n:=\sup_{w\in G} n_{f|_\Delta}(w)<+\infty,$$

那么 $D_\Delta[\varphi\circ f]\leqslant n\,D_G[\varphi]<+\infty$. 于是 $R\overline{\in}O_{A^0D}$. 矛盾说明

$$\sup_{w\in G} n_{f|_\Delta}(w)=+\infty. \blacksquare$$

**定理 8**　设 $R\in O_{A^0D}$，而 $\Omega$ 是 $R$ 的一个非紧好子域，其边界 $\alpha$ 为紧致的. 若 $w=f(p)$ 是 $\Omega\cup\alpha$ 上的一个非常数单值半纯函数，则 $f$ 关于 $\Omega$ 的理想边界 $\beta$ 的大范围聚值集 $C_\Omega(f,\beta)$ 是 $AD$-可去的充分必要条件为

$$\sup_{w\in G} n_f(w)<+\infty.$$

**证**　充分性. 设 $C_\Omega(f,\beta)$ 不是 $AD$-可去的. 记 $A$ 为 $C_\Omega(f,\beta)$ 中的 $AD$-不可去点全体. 于是，根据第五章 §1.3 定理 3，$A$ 是非空已密集. 现在取一点 $w_0\in A$ 和 $w_0$ 的一个足够小解析 Jordan 邻域 $U_0$ 使 $f^{-1}(U_0)$ 必有一非紧分支 $\Delta_0$ 不与 $\alpha$ 相交，且其关于相对理想边界的大范围聚值集 $C_{\Delta_0}(f|_{\Delta_0})$ 是非 $AD$-可去的. 根据第五章 §2.5 定理 2，存在一解析 Jordan 邻域 $U\subset U_0$ 使得 $f^{-1}(U)$ 有一非紧分支 $\Delta\subset\Delta_0$ 满足条件

$$n_{f|_\Delta}(w)\equiv\text{const.}<+\infty,$$

且 $U\backslash f(\Delta)$ 是非 $AD$-可去的. 与引理 2 矛盾.

必要性. 若 $C_\Omega(f,\beta)$ 是 $AD$-可去的，则 $f$ 具有 Iversen 性质，根据 Stoïlow 原理，

$$\sup_{w\in G} n_f(w)<+\infty. \blacksquare$$

### 3. $O_{A^0D}$ 类曲面的本性极大性

讨论 $O_{A^0D}$ 类曲面的本性极大性的意义在于存在着非本性极大的 $O_{AD}$ 类曲面(参看 Jurchescu, M [2]).

**定理 9** 设 $R\in O_{A^0D}$(对应地, $R\in O_{A^0B}$). 则

(i) $R$ 是本性极大;

(ii) 若 $w=\varphi(p)$ 是将 $R$(一对一)映入某一 Riemann 曲面 $\tilde{R}$ 的共形映照, 则 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 是 $AD$-(对应地, $AB$-)可去的;

(iii) $R$ 的任意两个极大延拓都是共形等价的.

**证** 由于 $O_{A^0B}\subset O_{A^0D}$, 故只需证 $AD$-可去的情形.

(i) 设 $w=\varphi(p)$ 将 $R$ 映入某一极大 Riemann 曲面 $\tilde{R}$, 不妨设 $\tilde{R}$ 覆盖在复 $w$-球 $K$ 上. 又假设 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 包含一连续统. 则 $\varphi(R)$ 关于 $\tilde{R}$ 的边界必包含一连续统 $\gamma$. 根据第五章§1.2 引理 2, 存在一点 $w_0\in\gamma$ 和 $w_0$ 的足够小解析 Jordan 邻域 $U$ 使得 $U$ 包含 $w_0$ 的参数邻域中、$\varphi^{-1}(U)$ 必有一非紧分支 $\Delta$ 不与 $\alpha$ 相交且 $U\backslash\varphi(\Delta)$ 包含一连续统. 与定理 6、7 矛盾.

(ii) 沿用 (i)的记号, 而曲面 $\tilde{R}$ 可以不是极大的, 而且由 (i) 得知 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 是全不连通的. 对每一点 $w_0\in\tilde{R}\backslash\varphi(R)$, 再次根据第五章§1.2 引理 2, 存在 $w_0$ 的足够小解析 Jordan 邻域 $U$ 使其包含 $w_0$ 的参数邻域中、$U$ 的边界 $\partial U$ 不与 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 相交. 于是由定理 8 可得 $U\cap(\tilde{R}\backslash\varphi(R))$ 是 $AD$-可去的. 从而 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 是 $AD$-可去的.

(iii) 设 $\tilde{R}$ 和 $\tilde{R}'$ 是 $R$ 的任意两个极大延拓, 而 $\varphi$ 和 $\varphi'$ 分别是将 $R$ 共形映入它们的共形映照. 与(ii)的证明中类似, 取 $\tilde{R}$ 上的点 $w_0$ 及其邻域 $U$. 显然, $\varphi'\circ\varphi^{-1}$ 将 $U\cap\varphi(R)$ 共形映成 $\tilde{R}'$ 的子区域 $V$. 记 $\bar{V}$ 为 $V$ 关于 $\tilde{R}'$ 的闭包. 注意到, $V$ 在 $\tilde{R}'$ 上的相对边界由两部分组成: 其一为 $V$ 关于 $\varphi'(R)$ 的边界 $\sigma'$, 它是一条解析 Jordan 曲线; 其二为 $\bar{V}\backslash V\cup\sigma'$, 根据 (ii), 它是 $AD$-可去集. 由此可见 $\varphi\circ\varphi'^{-1}$ 可以共形延拓到 $\bar{V}$ 上而成为 $\bar{V}$ 与 $\bar{U}$ 的同胚映照,

因为 $\tilde{R}$ 和 $\tilde{R}'$ 都是极大的. 最后让点 $w_0$ 取遍 $\tilde{R}\backslash\varphi(R)$ 并重复上述过程即完成证明. ▌

**推论**　设 $R\in O_{A^0D}$(对应地, $R\in O_{A^0B}$), $\Omega$ 是 $R$ 的一个非紧好子域, 其边界 $\alpha$ 为紧致的. 则

(i)　$\Omega\bigcup\alpha$ 是本性极大;

(ii) 若 $\varphi$ 是将 $\Omega\bigcup\alpha$ (一对一)映入某一 Riemann 曲面 $\tilde{\Omega}\bigcup\tilde{\alpha}$ 的共形映照, 则 $\tilde{\Omega}\backslash\varphi(\Omega)$ 是 $AD$-(对应地, $AB$-)可去的;

(iii) $\Omega\bigcup\alpha$ 的任意两个极大延拓都是共形等价的.

## §4　开 Riemann 曲面分类的几种判别法

本节将通过判别 $O_{AD}$ 类曲面来介绍开 Riemann 曲面分类的几种判别法.

### 1.　单叶 $O_{AD}$ 类区域上的半纯函数

**定理 1**　设 $G\in O_{AD}$ 是复 $z$-球面的单叶区域. 若 $f(z)$ 是 $G$ 上的单值单叶半纯函数, 则

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

**证**　不妨设 $\infty\in G$, 故 $G$ 的边界 $E$ 是有界闭集. 设 $f(z)$ 在点 $z_0\in G$ 为正则, 则下面的函数在点 $z_0$ 也正则:

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-f(z_0)}-\frac{1}{f'(z_0)(z-z_0)},$$

所以 $\varphi(z)$ 在 $G$ 内也是正则的. 于是, 容易看出 $\varphi(z)$ 在 $G$ 内的 Dirichlet 积分是有限的, 所以根据 $G\in O_{AD}$ 的假设 $\varphi(z)\equiv$const., 因此 $f(z)$ 是的线性函数. ▌

## 2. 模度判别法

考虑开 Riemann 曲面 $R$ 上一相对紧子区域 $E$，其边界 $\partial E$ 由有限 ($n>2$) 条 Jordan 曲线组成. 现将 $\partial E$ 的曲线分成两组 $\alpha$ 和 $\beta$. 设 $\chi$ 是 $E$ 上的调和函数，并使得

$$\chi|_\alpha = 0, \qquad \chi|_\beta = \log \mu, \tag{1}$$

其中 $\mu>1$ 是使

$$\int_\alpha {}^*\mathrm{d}\chi = 2\pi. \tag{2}$$

成立的常数，而 (2) 中积分理解为 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\int_{\chi=\lambda}{}^*\mathrm{d}\chi$. 数 $\mu$ 关于区域三元构形 $(E,\alpha,\beta)$是共形不变量，称其为$(E,\alpha,\beta)$的模度，并记为 $\mathrm{mod}(E,\alpha,\beta)$. 类似地称 $\log\mu$ 为构形 $(E,\alpha,\beta)$ 的对数模度，并记为 $\log \mathrm{mod}(E,\alpha,\beta)$.

另外，称 $\chi$ 为 $(E,\alpha,\beta)$ 的模度函数.

设 $w=w(\zeta)$ 是 $\beta$ 关于 $E$ 的调和测度，即 $w(\zeta)$ 是 $E$ 上的调和函数，而且 $w|_\alpha=0$, $w|_\beta=1$. 根据 Stokes 定理

$$\int_\alpha {}^*\mathrm{d}w = \int_E\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = D_E[w],$$

因此

$$\log\mu = \frac{2\pi}{D_E[w]}. \tag{1*}$$

模度的几何意义较为直观，这里不加证明而给出简单叙述. 设 $\psi$ 是模度函数 $\chi$ 的 (多值)共轭调和函数. 考虑 $E$ 上解析函数

$$\zeta = \mathrm{e}^{\chi+i\psi},$$

其模 $|\zeta|$ 为单值. 如果 $E$ 是二连通平面型区域，那么 $\zeta$ 将其共形映上一圆环，使该圆环的内外半径分别为 1 和 $\mu$，即内外半径之比为 $\mu$；如果 $E$ 是平面型区域，而 $\beta$ 由不止一条 Jordan 曲线组成，比如说 $\beta_1$ 和 $\beta_2$，那么可以沿着连接 $\beta_1$ 与 $\beta_2$ 的某一弧 $\gamma_\beta$ 将 $E$

割开，使得在 $\gamma_\beta$ 上(从局部考虑) $\psi$ 为常数. 于是函数 $\zeta$ 将所得到的二连通区域共形映上一含有射线裂缝的圆环，使该圆环的内外半径分别为 1 和 $\mu$；接着考虑 $E$ 的边界由 $\alpha$ 和 $\beta$ 组成，但 $E$ 的亏格为 1. 那么可以沿着 $E$ 上的一 Jordan 曲线 $\delta$ 将 $E$ 割开而使得 $E\setminus\delta$ 成为平面型二连通区域，并使得在 $\gamma_\beta$ 上 (从局部考虑) $\psi$ 为常数. 于是函数 $\zeta$ 将所得到的区域共形映上一含有射线裂缝的且内外半径分别为 1 和 $\mu$ 的圆环；一般情形可参照上述方法，使得函数 $\zeta$ 可将经割裂 $E$ 而得到的平面型二连通区域共形映上一含有射线裂缝的内外半径分别为 1 和 $\mu$ 的圆环.

如果有限个构形 $\{(E_j,\alpha_j,\beta_j)\}_{j=1}^{n}$ 为二二不交，且 $\alpha_i\cap\beta_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，置 $E=\bigcup_{j=1}^{n}E_j$，$\alpha=\bigcup_{j=1}^{n}\alpha_j$，$\beta=\bigcup_{j=1}^{n}\beta_j$，那么，类似地可以定义 $(E,\alpha,\beta)$的模度 $\mathrm{mod}(E,\alpha,\beta)$ 、模度函数 $\chi$ 及调和测度 $w(\zeta)$. 显然调和测度 $w(\zeta)$不仅满足式(1*)，而且它在 $E_j$ 上的限制 $w|_{E_j}$ 仍然是 $\beta_j$ 关于 $E_j$ 的调和测度. 因此可得

$$\frac{1}{\log \mathrm{mod}(E,\alpha,\beta)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\log \mathrm{mod}(E_j,\alpha_j,\beta_j)}. \tag{2*}$$

**引理 1**　设 $\sigma$ 是 $E$ 内有限条互不相交 Jordan 曲线组成之族，它分离 $\alpha$ 和 $\beta$ 、并将 $E$ 分成两个开集 $E^1$ 和 $\partial E^2$ 、同时使得 $\alpha\subset E^1$ 和 $\beta\subset\partial E^2$. 则

$$\mathrm{mod}(E,\alpha,\beta)\geqslant \mathrm{mod}(E^1,\alpha,\sigma)\cdot \mathrm{mod}(E^2,\sigma,\beta). \tag{3*}$$

此式称为模度不等式.

**证**　设 $w^1$ 是 $\sigma$ 关于 $E^1$ 的调和测度，$w^2$ 是 $\beta$ 关于 $E^2$ 的调和测度. 对于数 $\lambda\in(0,1)$，在 $\overline{E}$ 上定义函数

$$w^\lambda(z)=\begin{cases}\lambda w^1, & \text{当 } z\in\alpha\cup E^1\cup\sigma,\\ (1-\lambda)\left(w^2+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\right), & \text{当 } z\in\sigma\cup E^2\cup\beta.\end{cases}$$

根据 Green 公式，$D_E(w^\lambda)=D_E(w)+D_E(w-w^\lambda)$ ，因此

$$D_E(w) \leqslant D_E(w^\lambda) = \lambda^2 D_{E^1}(w^1) + (1-\lambda)^2 D_{E^2}(w^2).$$

将 $\lambda_0 = D_{E^2}(w^2)(D_{E^1}(w^1) + (1-\lambda)^2 D_{E^2}(w^2))^{-1}$ 代入上式得

$$\frac{1}{D_E(w)} \geqslant \frac{1}{D_{E^1}(w^1)} + \frac{1}{D_{E^2}(w^2)}.$$

再由(1')式可推出模度不等式. ▌

**注** 当且仅当 $w = w^{\lambda_0}$ 时模度不等式中的等号成立. 而当 $E$ 是同心圆环时, $w = w^{\lambda_0}$ 蕴含 $\sigma$ 是同心圆周.

设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是开 Riemann 曲面 $R$ 的一穷尽, 则开集 $R_{n+1} \setminus \overline{R}_n$ 由有限个相对紧区域 $E_{ni}$ 组成. 现分别将 $E_{ni}$ 在 $R_n$ 和 $R_{n+1}$ 之边界上的那部分围道记为 $\alpha_{ni}$ 和 $\beta_{ni}$. 设 $\mu_{ni}$ 是$(E_{ni}, \alpha_{ni}, \beta_{ni})$的模度, 并记

$$\mu_n = \min_i \mu_{ni}.$$

$\mu_n$ 称为 $R_{n+1} \setminus \overline{R}_n$ 的<u>模度</u>.

**定理 2** 设 $R$ 是一开 Riemann 曲面. 如果存在 $R$ 的一穷尽列 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty, \tag{1}$$

那么 $R \in O_{AD}$.

**注** 事实上, 式 (1) 成立是开 Riemann 曲面 $R \in O_{A^0 D}$ 的一充分条件.

**证** 设 $f(z)$ 是 $R$ 上的任一个非常数单值解析函数, 其实部 $\mathrm{Re} f$ 记为 $u$. 下面证明 $D[f] = 2D[u] = \infty$. 设 $\chi_{ni}$ 是 $(E_{ni}, \alpha_{ni}, \beta_{ni})$ 的模度函数, 并设 $\varphi_{ni}$ 是 $\chi_{ni}$ 在 $R$ 上的 (多重)共轭调和函数. 对实数 $0 \leqslant \lambda \leqslant \log \mu_n$, 设 $R(n,\lambda)$ 是以等位线 $\gamma_{ni\lambda}: \chi_{ni} = \lambda$ 为边界的 $R$ 的相对紧区域. 显然 $R_n \subset R(n,\lambda) \subset R_{n+1}$, 根据 Green 公式

$$D_{R(n,\lambda)}[u] = \int_{\partial R(n,\lambda)} u \, {}^*\mathrm{d}u = \sum_i \int_{\gamma_{ni\lambda}} (u - u_i) \, {}^*\mathrm{d}u,$$

其中 $u_i$ 是 $u$ 在 $\gamma_{ni\lambda}$ 的任一固定点处的值. 由于在 $\gamma_{ni\lambda}$ 上有

$$|u-u_1|=\left|\int_{\gamma_{n\lambda}}\frac{\partial u}{\partial\psi_{n1}}{}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\right|\leqslant\left[2\pi\int_{\gamma_{n\lambda}}\left(\frac{\partial u}{\partial\psi_{n1}}\right)^2{}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left(2\pi\int_{\gamma_{n\lambda}}|\mathrm{grad}\ u|^2\ {}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\right)^{1/2}$$

和

$$\int_{\gamma_{n\lambda}}|{}^*\mathrm{d}u|=\int_{\gamma_{n\lambda}}\left|\frac{\partial u}{\partial\chi_{n1}}\right|{}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\leqslant\left[2\pi\int_{\gamma_{n\lambda}}\left(\frac{\partial u}{\partial\chi_{n1}}\right)^2{}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant\left(2\pi\int_{\gamma_{n\lambda}}|\mathrm{grad}\ u|^2\ {}^*\mathrm{d}\chi_{n1}\right)^{1/2},$$

故可得

$$\left|\int_{\gamma_{n\lambda}}(u-u_1)\ {}^*\mathrm{d}u\right|\leqslant\int_{\gamma_{n\lambda}}|u-u_1||{}^*\mathrm{d}u|\leqslant 2\pi\int_{\gamma_{n\lambda}}|\mathrm{grad}\ u|^2\ {}^*\mathrm{d}\chi_{n1}.$$

因此

$$D_{R(n,\lambda)}[u]\leqslant 2\pi\int_{\partial R(n,\lambda)}|\mathrm{grad}\ u|^2\ {}^*\mathrm{d}\chi_{n1}=2\pi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}D_{R(n,\lambda)}[u],$$

从而

$$\int_0^{\log\mu_n}\mathrm{d}\lambda\leqslant 2\pi\int_0^{\log\mu_n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}D_{R(n,\lambda)}[u]\Big/D_{R(n,\lambda)}[u]\right]\mathrm{d}\lambda.$$

回顾 $R_n\subset R(n,0)\subset R(n,\log\mu_n)\subset R_{n+1}$，可知

$$\mu_n\leqslant\left(D_{R_{n+1}}[u]/D_{R_n}[u]\right)^{2\pi}.$$

最后得

$$D[u]=\lim_{n\to\infty}D_{R_n}[u]\geqslant D_{R_1}[u]\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{1/2\pi}=\infty.\ \blacksquare$$

### 3. 共形度量判别法

设 $\lambda(z)$ 是一个严格正的连续函数，若

$$ds = \lambda(z)|dz|$$

关于开 Riemann 曲面 $R$ 的局部参数 $z$ 是不变的，则称 $ds$ 是 $R$ 上的共形度量. 对 $R$ 上的两点 $z_1$、$z_2$，定义它们在 $R$ 上的距离为

$$s(z_1,z_2) = \inf\int_\gamma ds,$$

其中下确界是由 $\gamma$ 取遍连接 $z_1$ 和 $z_2$ 的可求长曲线而得. 如果 $z\in R$，而点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不聚集于 $R$ 的任一点，那么约定

$$\lim_{n\to\infty} s(z,z_n) = \infty,$$

同时说点 $z$ 与理想边界的距离为无限的. 固定一点 $z_0\in R$. 对 $\rho>0$，置 $\Gamma(\rho)=\{z|z\in R, s(z_0,z)=\rho\}$. 若 $\rho$ 足够小，则 $\Gamma(\rho)$ 必由单个曲线组成. 随着 $\rho$ 的增加，$\Gamma(\rho)$ 一般会在某个 $\rho_1$ 断成两条或更多条曲线. 随着 $\rho$ 的连续增加，可能发生新的组合. 如果 $R$ 是正亏格的，那么曲线也会在 $\rho$ 的值某个值时发生粘接. 设

$$\rho_1 < \cdots < \rho_n < \cdots \tag{1}$$

是使 $\Gamma(\rho)$ 的分支发生组合或粘接的 $\rho$ 之值.

对度量再加一条件：即(1)中之值无聚值. 如果数列(1)为有限项，那么在它们后面加进一无限列使所得列趋于无穷.

**定理 3** 设 $\Lambda(\rho)$ 是度量 $ds$ 下 $\Gamma(\rho)$ 的曲线之最长者，如果

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{d\rho}{\Lambda(\rho)} = \infty \qquad (\varepsilon > 0) \tag{2}$$

那么 $R\in O_{AD}$.

**注** 从下面证明和定理 2 的附注可知，积分 (2) 的发散也是开 Riemann 曲面 $R\in O_{A^0D}$ 的一充分条件.

**证** 对(1)中的每个 $\rho_n$，设 $R_n=\{z|z\in R, s(z_0,z)<\rho_n\}$，则 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $R$ 的一穷尽列，并使得 $\partial R_n=\Gamma(\rho_n)$. 记 $\mu_n$ 为 $R_{n+1}\setminus\overline{R}_n$ 极

小模度. 暂时固定 $n$. 设 $E$ 是 $R_{n+1}\setminus R_n$ 的那个取极小模度 $\mu_n$ 的分支，并置 $\alpha=(\partial R_n)\cap(\partial E)$，$\beta=(\partial R_{n+1})\cap(\partial E)$. 由于 $\Gamma(\rho)\cap E$ 的长度 $L(\rho)$ 有上界 $\Lambda(\rho)$，故

$$\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\Lambda(\rho)}\leqslant\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{L(\rho)}.$$

设 $w=w(z)$ 是 $\beta$ 关于 $E$ 的调和测度，而 $w^*$ 是其 (多值)共轭调和函数. 将 $E$ 沿适当曲线 $\gamma$ 割开，使得在 $\gamma$ 上 (从局部考虑) $w^*$ 为常数，比如为 0，且使得函数 $W=w+\mathrm{i}w^*$ 将割裂过的 $E$ 共形映上 $W$-平面的矩形 $T$：$0\leqslant w\leqslant 1, 0\leqslant w^*\leqslant 2\pi/\log\mu_n$. 于是 $\Gamma(\rho)\cap E$ 在 $T$ 中的欧氏长度不小于 $2\pi/\log\mu_n$：

$$\frac{2\pi}{\log\mu_n}\leqslant\int_{\Gamma(\rho)\cap E}\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right||\mathrm{d}z|.$$

根据 Schwarz 引理，有

$$\left(\frac{2\pi}{\log\mu_n}\right)^2\leqslant\int_{\Gamma(\rho)\cap E}\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{\lambda}\int_{\Gamma(\rho)\cap E}\lambda|\mathrm{d}z|.$$

用 $A(\rho)$ 表示矩形 $T$ 位于 $\Gamma(\rho)\cap E$ 的象之左侧的部分的面积. 由于

$$\int_{\Gamma(\rho)\cap E}\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|^2\frac{|\mathrm{d}z|}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{\rho_n}^{\rho}\int_{\Gamma(\rho)\cap E}\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|^2|\mathrm{d}z|\,\frac{|\mathrm{d}z|}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}\rho=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}A(\rho),$$

故可得 $$\left(\frac{2\pi}{\log\mu_n}\right)^2\leqslant\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\rho}L(\rho).$$ 由此可见

$$\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\frac{\mathrm{d}\rho}{L(\rho)}\leqslant\left(\frac{\log\mu_n}{2\pi}\right)^2\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\mathrm{d}A=\frac{1}{2\pi}\log\mu_n.$$

由 $n=1$ 至 $\infty$ 取和可得

$$\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\rho}{L(\rho)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\log\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n.$$

根据定理 2，$R\in O_{AD}$. ▌

### 4. 正则链判别法

设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是开曲 Riemann 面 $R$ 的一穷尽列，使得 $R_n$ 的边界 $\Gamma_n$ 由有限条解析 Jordan 曲线组成：$\Gamma_n=\bigcup_{i=1}^{\nu_n}\Gamma_{ni}$. 若存在与 $n$、$i$ 无关的常数 $N>0$ 和 $d$ $(0<d<1)$ 使满足下面条件：

(i) $\Gamma_{ni}$ 被其上 $l_i=l_{ni}$ 个点 $z_{nij}(j=1,2,\cdots,l)$ 之参数邻域 $U_{nij}$ 所覆盖，其中 $U_{nij}$ 与 $U_{ni,j+1}$ 相交，而 $U_{ni,l+1}=U_{1}$.

(ii) 若记 $G_{ni}=\bigcup_{j=1}^{l}U_{nij}$，则 $G_{ni}$ 的任一点最多属于 $\{U_{nij}\}$ 中的 $N$ 个，且 $\overline{G}_{ni}$ 是二二不交的. 置 $G_n=\bigcup_{i}G_{ni}$.

(iii)对于任意两个相交的参数邻域 $U_{nij}$ 和 $U_{nik}$，设其对应的参数圆分别为 $\{z||z_j|<1\}$ 和 $\{z||z_k|<1\}$，存在点 $z\in U_{nij}\cap U_{nik}$ 使得其象与 $\{z||z_j|=1\}$ 和 $\{z||z_k|=1\}$ 的距离都大于 $d$，则称 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个<u>正则覆盖</u>，$\{G_{ni}\}$ 称为<u>正则链族</u>. 而 $N$ 和 $d$ 则分别称为<u>覆盖数</u>和<u>覆盖常数</u>.

**定理 4** 设 $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是曲面 $R$ 的一穷尽列，而 $\Gamma_n$ 是 $R_n$ 的边界. 若存在 $\{\Gamma_n\}$ 的一个正则覆盖链族 $\{G_{ni}\}$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\infty,$$

那么 $R\in O_{AD}$，其中 $\lambda_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant\nu_n}l_{ni}$.

**证** 设 $G$ 是链族 $\{G_{ni}\}$ 中的一个链，记其中的参数邻域 $U_j$ 的个数为 $l$. 又设共形映照 $W$ 将 $G$ 映上边界为两个同心圆周圆环域 $A$，并设两圆周的半径之差为 1. 如果记内圆周半径为 $r$，则 $A$ 的模度，即 $G$ 的模度为：

$$\mu=\frac{1+r}{r}=1+\frac{1}{r}.$$

下面将借助于 $l$ 来估计 $r$. 对于 $G$ 中的任意两个相交的参数

邻域 $U_j$ 和 $U_k$，选取点 $z_j^1=z_k^1\in U_j\cap U_k$ 使得它们分别与 $\partial U_j$、$\partial U_k$ 的距离都大于 $d$. 设 $z_j^0$ 是 $U_j$ 的中心，且以 $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j$ 为其局部参数. 记 $(z_j^0z_j^1)$ 为连接 $z_j^0$ 和 $z_j^1$ 的线段. 显然由此而得到的链 $G$ 中之网线 $\sigma=\bigcup\limits_{j,k}(z_j^0z_j^1)$ 在 $A$ 中之象的长度 $L$ 满足

$$2\pi r\leqslant L\leqslant\sum_{j,k}\int_{(z_j^0z_j^1)}\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z_j}\right||\mathrm{d}z_j|.$$

设 $A_j$ 是 $U_j$ 在 $A$ 中之象的面积. 取 $\zeta\in(z_j^0z_j^1)$，并设 $\Delta$ 是以 $\zeta$ 为心，以 $d$ 为半径的 $U_j$ 中的圆片. 由 $|\mathrm{d}W/\mathrm{d}z_j|^2$ 在 $\Delta$ 中的下调和性可得

$$\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z_j}(\zeta)\right|^2\leqslant\frac{1}{\pi d^2}\int_\Delta\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z_j}\right|^2\mathrm{d}x_j\mathrm{d}y_j\leqslant\frac{A_j}{\pi d^2}.$$

由于对于每个 $j$，$(z_j^0z_j^1)$ 的个数不超过 $N$，又由于 $(z_j^0z_j^1)$ 的长度小于 1，于是有

$$2\pi r<\frac{N}{d\sqrt{\pi}}\sum_{j=1}^{l}\sqrt{A_j}\ .$$

根据 Schwarz 不等式　$4\pi^3d^2r^2<N^2l\sum\limits_{j=1}^{l}A_j$.　由 (i)，显然

$$\sum_{j=1}^{l}A_j\leqslant N[\pi(1+r)^2-\pi r^2]=2\pi N\left(r+\frac{1}{2}\right).$$

置 $c=2\pi^2d^2/N^3$ 可得

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{2r^2}>c\,\frac{1}{l}\ .$$

设 $\bar{\mu}_n$ 是 $G_n$ 之模度的最小者，并由 $G_{n_0}$ 取得. 又设 $l_n'=l_{n_0}$，而 $r_n$ 是前面所述的内半径. 则由不等式

$$\frac{1}{r_n}+\frac{1}{2r_n^2}>c\,\frac{1}{l_n'}>c\,\frac{1}{\lambda_n}$$

得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\infty$，或 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{r_n}\right)=\infty$. 又由于 $\bar{\mu}_n=1+\frac{1}{r_n}$，则有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}_n=\infty.$$

现在取 $R$ 的一个穷尽列 $\{R_k'\}_{k=1}^{\infty}$，使得 $\partial R_{2n-1}'$ 和 $\partial R_{2n}'$ 分别由 $\bigcup_k G_n$ 的“内”和“外”围道组成. 则其对应的模度乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}\mu_k'$ 以 $\prod_{n=1}^{\infty}\bar{\mu}_n$ 作为其子乘积. 因此可得 $R\in O_{AD}$. ▌

下面是关于 $O_G$ 曲面的一个正则链判别.

**定理 5**　设存在 $\{\Gamma_n\}$ 的一正则覆盖 $\{G_n\}$，其中 $\{G_n\}$ 最多交叠 $\lambda_0$ 次. 记 $\lambda(n)$ 为 $G_n$ 中参数邻域的个数. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda(n)}=\infty,$$

则 $R\in O_G$.

**证**　对正整数 $k$，可取足够大的 $n>k$ 使得 $G_k\subset R_n$. 设 $\omega_n(z)$ 是 $\Gamma_n$ 关于 $R_n\backslash R_0$ 的调和测度，记其共轭调和函数为 $\bar{\omega}_n(z)$. 置

$$w(z)=\omega_n(z)+\bar{\omega}_n(z).$$

设 $U_j:=U(z_j)(j=1,2,\cdots,\lambda(v))$ 是组成 $G_v(1\leqslant v\leqslant k)$ 的参数邻域，而 $L_v$ 是上面所定义的 $G_v$ 中的曲线族. 现在，将 $U_j$ 共形映上 $\{t\,|\,|t|<1\}$ 使得 $z_j$ 对应于 $t=0$. 设 $w_j(z)=v_j(t)$ $(|t|<1)$ 和

$$q_j=\max_{|t|\leqslant d<1}|v_j'(t)|.$$

则在 $\{t\,|\,|t|=d\}$ 上的某点 $t_0$ 有 $|v_j'(t_0)|=q_j$. 由于 $|v_j'(t)|^2$ 是下调和的，而 Dirichlet 在共形映照下是不变的，则

$$\pi(1-d)^2q_j^2\leqslant\int_0^{1-d}\int_0^{2\pi}|v'_j(t_0+re^{i\theta})|^2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\leqslant D_{U_j}[w].$$

又由于 $G_v'$ 的任一点最多被 $\{U_j\}$ 中的 $m$ 个所覆盖，则

$$\pi(1-d)^2\sum_{j=1}^{\lambda(v)}q_j^2\leqslant mD_{G_v}[w_n].\tag{3}$$

显然 $\Gamma_0$ 和 $L_v$ 围区域是 $R$ 紧子曲面，故

$$D_n = D_{F_n \vee F_0}[\omega_n] = \int_{I_0} \frac{\partial \omega_n}{\partial v} ds = \int_{I_0} d\omega_n^* = \int_{L_v} d\bar{\omega}_n$$

$$\leqslant \int_{I'_v} |d\bar{\omega}_n| \leqslant \sum_{j=1}^{\lambda(v)} \int_{\lambda_j} |v_j'(t)| dt \leqslant 2 \sum_{j=1}^{\lambda(v)} q_j,$$

据 Schwarz 不等式和式(3)，

$$D_n^2 \leqslant 4\lambda(v) \sum_{j=1}^{\lambda(v)} q_j^2 \leqslant \frac{4m\lambda(v) D_{G_v}[\omega_n]}{\pi(1-d)^2},$$

因此 $\sum_{v=1}^{k} \frac{1}{\lambda(v)} \leqslant \frac{4m}{\pi(1-d)^2 D_n^2} \sum_{v=1}^{k} D_{G_v}[\omega_n]$. 又由于 $\{G_v\}$ 最多交叠 $\lambda_0$ 次，从而 $\sum_{v=1}^{k} D_{G_v}[\omega_n] \leqslant \lambda_0 D_n$，所以

$$\sum_{v=1}^{k} \frac{1}{\lambda(v)} \leqslant \frac{4m\lambda_0}{\pi(1-d)^2 D_n}.$$

由 $\sum \frac{1}{\lambda(v)} = \infty$ 可得 $\lim_{n\to\infty} D_n = 0$. 据 §1 定理 2，$R \in O_G$. ▌

### 5. 作为复球面覆盖面时的判别

设 $\tilde{R}$ 是 $R$ 的非分歧覆盖面，并使得 $\tilde{R}$ 覆盖 $R$ 每点最多 $N$ 次，则称 $\tilde{R}$ 是 $R$ 的（有限）<u>$N$-阶非分支覆盖面</u>. 若 $R$ 满足定理 4 或 5 的条件，则 $\tilde{R}$ 也满足同样条件，故有

**定理 6**　$R$ 满足定理 4(对应地，定理 5)的条件，而 $\tilde{R}$ 是 $R$ 的（有限）$N$-阶非分支覆盖面，则 $\tilde{R} \in O_{AD}$(对应地，$\tilde{R} \in O_G$).

下面用大范围聚值来判别.

**定理 7**　设 $R$ 是一开 Riemann 曲面，若其上存在一非常数单值半纯函数 $w=f(z)$ 使其大范围聚值集 $C_R(f)$ 是 $AD$-可去的，则 $R \in O_{AD}$.

**证**　把 $w=f(z)$ 所产生的盖在复 $w$-球面 $K$ 上的 Riemann 面记作 $\Phi$，而 $f$ 做为 $R$ 到 $\Phi$ 的共形映照记为 $\tilde{f}$. 因为 $f$ 具有 Iversen

性质，根据 Stoïlow 原理，除 $C_R(f)$ 外球 $K$ 上每一点都被 $\Phi$ 覆盖(同样多的) $n$ 次. 若 $R\in O_{AD}-O_{ABD}$，则在 $R$ 上存在一个非常数单值有界且具有有限 Dirichlet 积分的解析函数 $g(p)$. 不妨设在某一点 $p_0\in R$，$g(p_0)=0$ 且 $f(p_0)\in C_R(f)$. 现在令 $h(q)=g\circ f^{-1}(q)$，于是 $h(q)$ 是定义在 $\Phi$ 上的有界且具有有限 Dirichlet 积分的解析函数. 设 $|h(q)|\leqslant M$. 对任一点 $z\in K\setminus C_R(f)$，置

$$H(z)=h(q_1^z)h(q_2^z)\cdots h(q_n^z),$$

其中 $h(q_i^z)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\Phi$ 覆盖在 $z$ 点上的 $n$ 个点. 则 $H(z)$ 是 $z\in K\setminus C_R(f)$ 上的有界解析函数. 记 $z=x+iy$，有

$$\begin{aligned}
D_{K\setminus C_R(f)}[H] &\leqslant \int_{K\setminus C_R(f)} |H'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{K\setminus C_R(f)} \left|\sum_{i=1}^{n} h(q_1^z)\cdots h'(q_i^z)\cdots h(q_n^z)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant M^{2(n-1)} \int_{K\setminus C_R(f)} \sum_{i=1}^{n} |h'(q_i^z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant n^2 M^{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \int_{K\setminus C_R(f)} |h'(q_i^z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant n^3 M^{2(n-1)} D^{\Phi}[h] = n^3 M^{2(n-1)} D_R[g] < \infty.
\end{aligned}$$

显然 $H(f(p_0))=0$，但 $h(q)$ 不恒为 0，则必有一点 $z_1\in K\setminus C_R(f)$ 使 $H(z_1)\neq 0$. 从而 $H(z)$ 是 $K\setminus C_R(f)$ 上的非常数单值有界且 Dirichlet 积分有限的解析函数. 即 $K\setminus C_R(f)\notin O_{AD}=O_{ABD}$. 故 $C_R(f)$ 不是 $AD$-可去的，矛盾. ▌

由于亏格有限的开 Riemann 曲面总可以被共形映入复平面的有限叶覆盖面之中，故由定理 7 可得：

**推论 1** 设 $R$ 是一亏格有限的开 Riemann 曲面，则 $R\in O_{AD}$ 的充分必要条件是 $R$ 上存在一非常数单值半纯函数 $w=f(z)$ 使其大范围聚值集 $C_R(f)$ 是 $AD$-可去的.

# §5　严格包含关系

本节罗列出一些开 Riemann 曲面的例子以说明 §1 有关 Riemann 曲面关系图中的包含关系是严格的. 由于有关的部分证明还用到许多本书未涉及到的概念和定理，故此处只给出简略的说明或证明，详细的证明读者可从所建议的参考文献中查到.

### 1.　$O_{AD}\backslash O_{AB}$ 曲面的存在性

**定理** 1　存在属于 $O_{AD}\backslash O_{AB}$ 的平面型的开 Riemann 曲面.

**证**　根据第四章 §4.6，在单位圆周 $C$ 上存在内容量为 1 的真子集 $E$. 由于单位圆周的容量为 1，根据第五章 §1.13 定理 12，集 $E$ 是 $AD$-可去集. 但 $E$ 是正测度集，根据 §2 定理 16 的附注，$E$ 非 $AB$-可去集. 根据 §2 定理 17 和 18，$C\backslash E\in O_{AD}\backslash O_{AB}$. ▌

**定理** 2　存在属于 $N_D$ 而不属于 $N_B$ 的平面点集；即存在 $AD$-可去而非 $AB$-可去的平面点集.

### 2.　广义 Cantor 集

第一章 §2.4 引进了 Cantor 疏朗完备集，集 $E_0$ 是其经典形式. 下面将构造广义 Cantor 集. 设 $E$ 是闭单位线段[0,1]. 从 $E$ 中间移去 $1/p_1$ $(p_1>1)$长度的开线段，使得剩余部分 $E(p_1)$由两个相等的闭线段组成. 从 $E(p_1)$的每个线段中间移去 $1/p_2$ $(p_2>1)$长度的开线段，使得剩余部分 $E(p_1p_2)$由四个相等的闭线段组成. 类似地，不断重复此过程，一般做法是从 $E(p_1\cdots p_{n-1})$的每个线段中间移去 $1/p_n$ $(p_n>1)$长度的开线段，使得剩余部分 $E(p_1\cdots p_n)$由 $2^n$ 个相等的闭线段组成. 它们的交集

$$E(p_1p_2\cdots):=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(p_1\cdots p_n)$$

称为广义 Cantor 集. 显然广义 Cantor 集是疏朗完备集. 如果恒取 $p_n=3$，那么 $E(p_1p_2\cdots)$ 即为经典 Cantor 集. 显然 $E(p_1\cdots p_n)$的长度为 $\prod_{v=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_v}\right)$. 从而 $E(p_1p_2\cdots)$的长度为

$$\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_v}\right).$$

**定理** 3 设 $\sup_n p_n<\infty$，则广义 Cantor 集 $E(p_1p_2\cdots)$是零容集当且仅当

$$\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_v}\right)^{2^{-v}}=0.$$

证明参看 Sario L. & Nakai M. [1] (pp. 336-339).

若 Cantor 集 $E(p_1p_2\cdots)$中恒取 $p_v=p>1$ $(v=1,2,\cdots)$，则将所得的 Cantor 集记为 $E(p^\infty)$. 此时，

$$\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_v}\right)^{2^{-v}}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\sum\limits_{v}2^{-v}}=1-\frac{1}{p}>0.$$

故 $E(p^\infty)$为正容集. 但由于

$$\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_v}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n=0$$

$\left(\text{等价于 }\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{p_v}=0\right)$，所以 $E(p^\infty)$为(Lebesgue)零测度集.

**定理** 4 存在 $AB$-可去而非零容的线性点集.

**证** 事实上，Cantor 集 $E(p^\infty)$即为所需集. 因为 $E(p^\infty)$为零测度集，根据第五章§1.2 定理 9，必为 $AB$-可去集. 又根据定理 3，$E(p^\infty)$为正零容集. ▌

**定理 5**　存在属于 $O_{AB}\backslash O_G$ 的平面型开 Riemann 曲面.

3.　**一般广义 Cantor 集**

设 $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一实数列，其中 $0<q_i<1$，而 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一自然数列. 设 $E$ 是闭单位线段 $[0,1]$. 下面将构造更为一般的 Cantor 集.

第一步是将 $E$ 分成 $2n_1+1$ 个闭子线段，并从左至右依次排列，排位奇数的线段长为 $a_1:=q_1/(n_1+1)$，排位偶数的线段长为 $b_1:=(1-q_1)/n_1$. 为方便，将它们分别称为 $a_1$-线段和 $b_1$-线段. 将所有 $a_1$-线段之并记为 $E_1$；第二步是将每个 $a_1$-线段分成 $2n_2+1$ 个闭子线段使得奇位线段长和偶位线段长分别为

$$a_2:=\frac{q_2}{n_2+1}a_1 \quad 和 \quad b_2:=\frac{1-q_2}{n_2}a_1.$$

再将所有 $a_2$-线段之并记为 $E_2$；……；如此不断进行下去，可得一套集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots$，其交集 $E(q_i;n_i):=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$ 是疏朗完备集，称为一般广义 Cantor 集. 显然 $E(q_i;n_i)$ 的长度为 $\prod_{i=1}^{\infty}q_i$，且 $E(q_i;n_i)$ 的长度为正值当且仅当

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-q_i)<\infty. \qquad (*)$$

**定理 6**　存在属于 $O_{SB}\backslash O_{AD}$ 的平面型开 Riemann 曲面，其中 $O_{SB}$ 表示其上不存在非常数单叶有界解析函数的开 Riemann 曲面.

事实上，若取集 $E^{(2)}$ 为 $E(q_i;n_i)$ 的笛卡尔直积，则 $E^2$ 是 $N_{SB}$ 集，只要 $\sum_{i=1}^{\infty}(1-q_i)\log\frac{n_i(1-q_{i-1})}{4}$ 发散. 于是 $K\backslash E^{(2)}\in O_{SB}$. 而且，$E(q_i;n_i)$ 具有正线性测度，从而 $E^2$ 具有正面积. 根据第四章 §1.13 定理 12，$E^{(2)}$ 非 $AD$-可去，根据 §2 定理 14，$K\backslash E^{(2)}\bar{\in} O_{AD}$.

应当说明，上述条件与条件 $\sum_{i=1}^{\infty}(1-q_i)<\infty$ 是不矛盾的，且满足此两条件的数列是存在的．例如，先取数列 $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使式(＊)成立，再取自然数列满足下面条件即可：

$$n_k > 4\,e^{1/(k-kq_k)}/(1-q_k).$$

具体可取 $q_k=1-k^2$，$n_k=k^2 2^k$.

**定理 7**　存在属于 $N_{SB}$ 而不属于 $N_D$ 的平面点集.

4.　Mybreg, P. J. **的例子**

回忆第三章 § 1 例 3：设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是实轴上的(严格)单调增加的点列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$. $\Delta$ 是复平面 $P:=\{z\,|\,|z|<\infty\}$ 的上半平面的一个闭圆盘. $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 都是以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为支点的 $P$ 的二叶覆盖面. 不同的是：$\Phi_1$ 为完全覆盖面；而 $\Phi_2$ 覆盖面 $P\backslash\Delta$ 的每点恰好两次、而覆盖面 $\Delta$ 的每点恰好一次．曲面 $\Phi_2$ 显然可被本性延拓成 $\Phi_1$. 还要证明 $\Phi_2\in O_{AD}$. 事实上，下面证明的是 $\Phi_2\in O_{AB}(\subset O_{AD})$. 为此将 $\Phi_2$ 覆盖在点 $z\in P$ 上的上、下两点分别记为 $z_1$、$z_2$. 设 $f(z)$ 是定义在 $\Phi_2$ 上的 $AB$-函数．置

$$F(z)=[f(z_1)-f(z_2)]^2.$$

补充定义 $F(a_n)=0$. 则 $F(z)$ 是 $P\backslash\Delta$ 上的 $AB$-函数．由于单点是零容的，从而是 $AB$-可去的．于是补充定义 $F(\infty)=0$ 后，$F(z)$ 成为 $\infty$ 邻域上的 $AB$-函数．那么在 $P\backslash\Delta$ 上 $F(z)\equiv 0$，即 $f(z_1)\equiv f(z_2)$. 由此可见 $f(z)$ 可看成 $P$ 上的 $AB$-函数，从而恒为常数．这就证明了 $\Phi_2\in O_{AB}\subset O_{AD}$. 然而根据 § 3 定理 7，$\Phi_2\bar{\in} O_{A^0D}$. 于是有

**定理 8**　存在属于 $O_{AB}\backslash O_{A^0BD}$ 的开 Riemann 曲面.

5.　Tôki, Y. **的例子**

众所周知，每个自然数 $\mu$ 可表为 $\mu=\mu(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$，

其中 $m$、$n$ 是自然数.

用 $\Delta$ 表示 $z$-平面上的开单位圆盘. 在 $\Delta$ 内取 $2^{2n}$ 条线段

$$S_{mn}^{v}:=\{z=re^{i\theta}\mid -2^{-2n}\leqslant \log r\leqslant -2^{-2n-1},\ \theta=v\cdot 2\pi\cdot 2^{-2n}\},$$

$v=1,\cdots,2^{2n}$. 现将 $\Delta$ 沿所有射状线段 $S_{mn}^{v}$ 裂开成裂缝圆盘，记为 $R_0$. 设 $\{R(h)\}_{h=0}^{\infty}$和$\{R'(h)\}_{h=0}^{\infty}$是 $R_0$ 的两列副本，即它们中的每一个都是裂缝圆盘 $R_0$. 对固定的自然数 $m$，对自然数 $i=1,\cdots,m$，对任意非负整数 $j$，当 $j$ 是奇数时，将 $R(i+mj)$与 $R'(i-m+mj)$ 沿裂缝 $S_{mn}^{v}$ 对接(见第三章 § 1 例 2)；当 $j$ 是偶数时，将 $R(i+mj)$ 与 $R'(i+m+mj)$也沿裂缝 $S_{mn}^{v}(n=1,2,\cdots;\ v=1,\cdots,2^{2n})$对接. 所得的曲面是 $\Delta$ 的无限叶覆盖面，记为 $F_T^{(1)}$. 显然 $F_T^{(1)}\overline{\in} O_{AB}$. 可以证明:$F_1$ 上的任一 $HB$- 在投影相同的点上取相同的函数值，故 $F_T^{(1)}\in O_{HBD}$. 根据 § 2 定理 8，$O_{HD}=O_{HBD}$,故有

**定理 9**　*存在属于 $O_{HD}\backslash O_{AB}$ 的开 Riemann 曲面.*

下面构造 Tôki,Y. 的另一个曲面. 将开单位圆盘 $\Delta$ 沿直线段 $l_\theta:=\{z=re^{i\theta}\mid a\leqslant r\leqslant b\}$作裂缝，其中 $a$、$b$ 是正数且 $a<b$. 对每条裂缝 $l_\theta$，称对应于幅角 $\theta+0$ 的一侧为 $l_\theta$ 的左岸,对应于幅角 $\theta-0$ 的一侧为 $l_\theta$ 的右岸. 对位于圆环$\{z=re^{i\theta}\mid 0<a\leqslant r\leqslant b<1\}$内的两端点分别落在圆环内、外边界上的一族射线裂缝，用三种方法粘合之：

1) 设 $l_1,\cdots,l_k$ 是其中的 $k$ 条裂缝. 把 $l_1$ 的左岸 $l_1^+$ 和 $l_2$ 的右岸 $l_2^-$ 相粘合，再把 $l_2$ 的左岸 $l_2^+$ 和 $l_3$ 的右岸 $l_3^-$ 相粘合；如此进行下去，最后把 $l_k$ 的左岸 $l_k^+$ 和 $l_1$ 的右岸 $l_1^-$ 相粘合. 称此为<u>循环粘合</u>.

2) 设两条裂缝 $l_1$ 和 $l_2$ 关于裂缝 $l$ 为轴对称. 把 $l_1$ 的左岸 $l_1^+$ 和 $l_2$ 的右岸 $l_2^-$ 相粘合，再把 $l_2$ 的左岸 $l_2^+$ 和 $l_1$ 的右岸 $l_1^-$ 相粘合. 称此为<u>对称粘合</u>.

3) 把裂缝的左岸和右岸相粘合. 称此为<u>自身粘合</u>.

设$\{n_\mu\}$是正整数列. 又设$\{r_\mu\}$是严格单增的正数列，使得

$$r_\mu \to 1\ (\mu \to \infty)，\text{其中 } r_1 > 1/2.$$

现将 $\Delta$ 沿 $2^{n+n_\mu}$ 条射状直线段裂开. 使其如前所述，每条直线段都落在某个半径上，且其两端点分别落在圆周 $\{z \mid |z| = r_{2\mu}\}$ 和圆周 $\{z \mid |z| = r_{2\mu+1}\}$ 上；而且这些裂缝按幅角等间距地分布在圆环 $\{z \mid r_{2\mu} \leqslant |z| \leqslant r_{2\mu+1}\}$ 内；更有其中有一条落在正实轴上. 为方便，称对应于 $\mu = \mu(m,n)$ 的裂缝为秩是 $\mu$ 的 $n$ 型裂缝.

记 $\theta_n = 2^{-n+1}\pi$. 把扇形 $\{\theta \mid j\theta_n \leqslant \theta \leqslant (j+1)\theta_n,\ 0 \leqslant j < 2^n\}$ 记为 $S_{jn}$. 现将落在射线 $\{\theta \mid \theta = j\theta_n\}$ 上的 $n$ 型裂缝循环粘合，将扇形 $S_{jn}$ 的其余 $n$ 型裂缝关于 $S_{jn}$ 的角平分线对称粘合，最后将落在射线 $l_\mu$ 上的裂缝自身粘合. 由此得一开 Riemann 曲面 $F_T^{(2)}$.

只要适当地选择正整数列 $\{n_\mu\}$ 即可使曲面 $F_T^{(2)}$ 属于 $O_{HB}$. 由于 $g(z,0) := \log \frac{1}{|z|}$ 是曲面 $F_T^{(2)}$ 上以 0 为极的 Green 函数，故 $F_T^{(2)}$ 不属于 $O_G$. 于是有

**定理 10**　存在属于 $O_{HP} \setminus O_G$ 的开 Riemann 曲面.

另外，如果在构造 $F_T^{(2)}$ 的过程中将原点 0 挖去，所得的曲面记为 $F_T^{(3)} := F_T^{(2)} \setminus \{0\}$，那么 $\log \frac{1}{|z|}$ 是曲面 $F_T^{(3)}$ 上的正调和函数. 故 $F_T^{(3)}$ 不属于 $O_{HP}$. 于是有

**定理 11**　存在属于 $O_{HB} \setminus O_{HP}$ 的开 Riemann 曲面.

曲面 $F_T^{(1)}$、$F_T^{(2)}$ 和 $F_T^{(3)}$ 即为 Tôki, Y. 构造出的开 Riemann 曲面的例子. 定理 10、11 中 $F_T^{(2)} \in O_{HP}$ 和 $F_T^{(3)} \in O_{HB}$ 的证明与正整数列 $\{n_\mu\}$ 的选择直接相关且较为复杂，读者可参看 Ahlfors & Sario [1] (pp. 256-261) 或 Sario & Nakai [1](pp. 304-308).

**定理 12**　存在属于 $O_{AB} \cap O_{MD^*} \setminus O_{A^0HD}$ 的开 Riemann 曲面.

**证**　设 $g(z,0)$ 是曲面 $F_T^{(2)}$ 上以 0 为极的 Green 函数. 只要正整数 $N$ 足够大，等位线 $\sigma := \{z \mid g(z,0) = N\}$ 就会全部落在开圆盘

$\{z||z|<1/8\}$的内部. 把 $\sigma$ 所围的包含 0 点的单连通 Jordan 区域记为 $\Delta_0$. 取 $R=F_T^{(2)}\setminus(\Delta_0\cup\sigma)$，则 $R$ 为所需曲面. ▌

### 6. Kuroda, M 的例子

考虑圆环域 $H:=\{z|1<|z|<12\}$. 现将 $e^{i\theta}$ 与 $12e^{i\theta}$ 粘合，由此得一个亏格为 1 的闭 Riemann 曲面 $T$，即轮胎面. 将 $T$ 上与 $e^{i\theta}$(或 $12e^{i\theta}$)相对应的闭路剖线记为 $L_1$，并置 $T'=T\setminus L_1$. 显然 $L_1$ 是一解析曲线，而 $T'$ 是圆环 $H$ 的共形象，为此视为恒同.

在圆环域 $H_0:=\{z|3<|z|<4\}$内考虑两个相互分离的闭圆盘 $D_1$、$D_2$，其边界圆周分别记为 $\gamma_1$、$\gamma_2$. 于是开 Riemann 曲面 $T_0:=T\setminus(D_1\cup D_2)$即为带两个"破洞"的轮胎面，其边界为 $\gamma_1\cup\gamma_2$. 现将 $T_0$ 沿闭路剖线 $L_1$ 剪开，所得的开 Riemann 曲面记为 $T_0'$，显然 $T_0'=T_0\setminus L_1=T\setminus(D_1\cup D_2\cup L_1)$.

再将 $T_0$(对应地，$T_0'$)沿边界 $\gamma_1\cup\gamma_2$ 作 Schottky 双倍 $\hat{T}_0$(对应地，$\hat{T}_0'$). 容易看出 $\hat{T}_0$ 是亏格为 3 的闭 Riemann 曲面，而 $\hat{T}_0'$ 是亏格为 1 的开 Riemann 曲面. 且 $\hat{T}_0'=\hat{T}_0\setminus(L_1\cup L_2)$，其中 $L_2$ 是 $L_1$ 关于边界 $\gamma_1\cup\gamma_2$ 的对称象.

下面用 $\hat{T}_0'$ 构造 $\hat{T}_0$ 的 Schottky 覆盖面. 取 $\hat{T}_0'$ 的无限多个副本. 注意到对应于剖线 $L_i(i=1,2)$，$\hat{T}_0'$ 的边界分为上、下两岸.

首先，对于两个副本，若将第一个副本的边界剖线的上岸与第二个副本的同一边界剖线的下岸的对应点相粘合，则称此粘合法为<u>单对接</u>. 现固定一个 $\hat{T}_0'$，记为 $R_0$. 将 $R_0$ 沿每个边界围道分别与副本 $R_1^k(k=1,\cdots,4)$逐个单对接，所得开 Riemann 曲面记为 $R_1$；假设 $R_{n-1}$ 已构造好，使得 $R_{n-1}$ 的边界由 $4\cdot3^{n-1}$ 个围道组成，而每个围道都是剖线 $L_i(i=1,2)$的上、下两岸之副本. 为构造 $R_{n-1}$，取 $\hat{T}_0'$ 的 $4\cdot3^{n-1}$ 个副本 $R_{n-1}^k$. 现将 $R_{n-1}$ 沿每个边界围道分别与副本 $R_2^k(k=1,\cdots,4\cdot3^{n-1})$逐个单对接，所得开 Riemann 曲面记为 $R_n$. 根据归纳法，一列开 Riemann 曲面$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$已构造好. 记

$R=\bigcup R_n$，则 $R$ 是 $\hat{T}_0$ 的一 Schottky 覆盖面，且 $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $R$ 的一穷尽列. Kuroda, M[1]证明 $R$ 是满足下面定理的曲面：

**定理** 12　*存在属于 $O_{A^0B}\backslash O_{HD}$ 的开 Riemann 曲面.*

7.　Heins, M. **的例子**

本段的开 Riemann 曲面的例子是 Heins, M. [2]的例子稍加修改而得，读者可参看 Qiu, Shuxi[3].

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一满足下面条件的正数列：

(1) $a_1>2$；　(2) $a_{2n+1}=2a_{2n}$；　(3) $8a_{2n}=9a_{2n-1}$.

将实轴线段 $[a_{2n-1},a_{2n}]$ 分成奇数段 $\{l_n^k\}_{k=1}^{2m_n+1}$，其中 $m_n>a_{2n}/2$. 记

$$d_{2n}=\frac{41}{40}a_{2n-1},\quad d_{2n-1}=\frac{21}{20}a_{2n-1},\quad c_{2n}=\frac{43}{40}a_{2n-1},$$

$$c_{2n-1}=\frac{11}{10}a_{2n-1},\quad b_n=1+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

置

$\Delta_1$：复 $z$-平面区域 $\{z\,|\,|z|>1\}$ 沿实轴线段 $[a_{2n},a_{2n+1}]$、$\{l_n^k\,|\,k$ 为偶数$\}$ 及 $[b_{2n},b_{2n+1}]$ 裂开(对每个自然数 $n$)；

$\Delta_2$：复 $z$-平面区域 $\{z\,|>1\}$ 沿实轴线段 $[a_{2n},a_{2n+1}]$、$\{l_n^k\,|\,k$ 为偶数$\}$、$[b_{2n},b_{2n-1}]$、$[-b_{2n-1},-b_{2n}]$ 及 $[-d_{2n-1},-d_{2n}]$ 裂开(对每个自然数 $n$)；

$\delta_0$：复 $z$-平面区域 $\{z\,|\,\mathscr{R}_e z<-1\}$ 沿实轴线段 $[-b_{2n-1},-b_{2n}]$ 及 $[-c_{2n-1},-c_{2n}]$ 裂开(对每个自然数 $n$)；

$\delta_n$：$\delta_0$ 沿实轴线段 $[-d_{2n-1},-d_{2n}]$ 裂开.

现将 $\Delta_1$ 与 $\Delta_2$ 对应的裂缝对接，再将 $\delta_1$ 中的裂缝 $[-d_1,-d_2]$ 及 $\{[-b_{2n-1},-b_{2n}]\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 与 $\Delta_2$ 中对应的裂缝对接. 当 $n\geq 2$ 时，$\delta_{n-1}$ 已粘合好. 若 $n$ 为偶数，将 $\delta_n$ 中的裂缝族

$$\{[-c_{2n-1},-c_{2n}]\,|\,n=1,2,\cdots\}$$

与 $\delta_{n-1}$ 中对应的裂缝对接、再将裂缝 $[-d_{2n-1},-d_{2n}]$ 与 $\Delta_2$ 中对应

的裂缝对接；若 $n$ 为奇数，将 $\delta_n$ 中的裂缝

$$\{[-b_{2n-1},-b_{2n}]|n=1,2,\cdots\}$$

与 $\delta_{n-1}$ 中对应的裂缝对接、再将裂缝$[-d_{2n-1},-d_{2n}]$与 $\Delta_2$ 中对应的裂缝对接. 上述过程构造得一开 Riemann 曲面，记为 $F_H^{(1)}$，可以证明它满足下面定理的结论.

**定理** 13　存在开 Riemann 曲面 $F_H^{(1)}$，其任意端 $\Omega$ 上所定义的半纯函数之球面 Dirichlet 积分皆为无限的，且 $F_H^{(1)}\overline{\in}O_{A^0D}\cup O_{AB}$.

**定理** 14　存在属于 $O_{MD^*}\setminus O_{A^0D}\cup O_{AB}$ 的开 Riemann 曲面.

下面再构造另一开 Riemamm 曲面. 置

$E_0$：开上半复平面$\{z|\mathrm{I_m}z>0\}$沿虚轴线段$[a_{2n+1}\mathrm{i},a_{2n+2}\mathrm{i}]$裂开（对每个自然数 $n$）；

$E_1$：复 $z$-平面沿实轴线段$[a_{2n},a_{2n+1}]$、$\{l_n^k|k$ 为偶数$\}$及虚轴线段$[a_{2n}\mathrm{i},a_{2n+2}\mathrm{i}]$裂开（对每个自然数 $n$）；

$E_2$：复 $z$-平面沿实轴线段$[a_{2n},a_{2n+1}]$、$\{l_n^k|k$ 为偶数$\}$及实轴线段$[-a_{2n+2},-a_{2n+1}]$裂开（对每个自然数 $n$）；

$\sigma_n$：延拓的复平面$\{z||z|\leqslant+\infty\}$沿实轴线段$[-a_{2n+2},-a_{2n+1}]$裂开.

先将 $E_0$ 与 $E_1$ 对应的裂缝对接；再将 $E_1$ 与 $E_2$ 对应的裂缝对接；最后将每个 $\sigma_n$ 与 $E_2$ 中对应的裂缝对接. 上述过程构造得一开 Riemann 曲面，记为 $F_H^{(2)}$，可以证明它满足下面定理的结论.

**定理** 15　存在开 Riemann 曲面 $F_H^{(2)}$，其任意端 $\Omega$ 上的 $AB$-函数必退缩为常数，且 $F_H^{(2)}\overline{\in}O_{A^0D}$.

根据本节定理，读者可以看出在本章开头有关 Riemann 曲面包含关系的图表中，凡包含关系的各曲面类之间都是严格包含的，而无法标出包含关系的各曲面类之间都是互不包含的.

# 参考文献

## References


Ahlfors, L. V. (L. V. 阿尔福斯)

[1] 复分析(第三版, 张立 张靖 译). 上海: 上海科技出版社, 1962.

Ahlfors, L. V. & Beurling, A.

[1] Conformal Invariants Function-Theoretic Null-Sets. Acta Math., 1950; 83: 101 ~129.

Ahlfors, L. V. & Sario, L. [1] Riemann Surfaces. Prinston University Press, 1960.

Behnke, H. & Stein, K.

[1] Entwicklung Analytischer Funktionen auf Riemannschen Flachen. Math. Ann. Bd. 1948; 120: 430~416.

Bochner, S. [1] Fortsetzung Riemannscher Flachen. Math. Ann. 1927; 98; 406~421.

Heins, M.

[1] On the Continuation of a Riemann Surfaces. Ann. of Math. 1942; 43

[2] Riemann Surfaces of Infinite Genus. Ann. of Math. 1952; 55(2): 296~317

Jurchescu, M.

[1] Bordered Riemann Surfaces. Math. Ann. 1961; 143: 264~292.

[2] A Maximal Riemann Surface. Nagoya Math. J. 1962; 20: 91~93.

Kuroda, M.

[1] On Analytic Functions on some Riemann Surfaces. Nagoya Math. J. June 1956; 10: 27~50.

Oikawa, K.

[1] On the uniqueness of the prolongation of an open Riemann surface of finite genus. Proc. Amer. Math. Soc. 1960; 11: 785~787.

邱曙熙(Qiu, Shuxi)

[1] Riemann 曲面分类理论的一些补充. 厦门大学学报, 1981;20(4): 416～425

[2] Riemann 曲面上的几种函数论零集. Ibid, 1982;21: 138～145.

[3] Riemann 曲面类 $O_{AD_0}$ 和 $O_{AD_0^*}$. Ibid, 1983;22: 427～432.

[4] The Essential Maximality And Some Other Properties of a Riemann Surface of $O_A{}^0{}_D$. Chin. Ann. of Math., 1985;6B(3):317～323.

[5] 双曲 Riemann 曲面上有界调和函数的共轭空间. 厦门大学学报, 1987; 26: 293～298.

[6] 极大 Riemann 曲面的理想边界性质. Ibid, 1988;27: 377～380.

[7] Asymptotic points of meromorphic functions on a Maximal noncompact Riemann surfase. Japanese J. Math., 1996;22(1): 69～77.

邱曙熙,高琪仁(Qiu Shuxi & Gao Qiren)

[1] 关于 Heins 端的椭圆维数. 厦门大学学报, 1994;33(5): 581～584.

Radó T. [1] Subharmonic Functions. Berlin.

Renggli, H.

[1] On Maximal Riemann Surfaces. Amer. J. Math. 1966;88: 179～186.

[2] Structural Instability and Extensions of Riemann Surfaces. Duke Math. J. 1975;42: 211～224.

Sakai, Makoto

[1] Analytic Functions with Finite Dirichlet Integrals on Riemann Surfaces. Acta. Math. 1979;142: 199～220.

[2] Continuations of Riemann Surfaces. Can. J. Math. 1992;44(2): 357～367.

Sario, L. & Nakai, M. [1] Classification Theory of Riemann Surfaces. Springer, 1970.

Sario, L. & Oikawa, K. [1] Capacity of Functions. Springer, 1969.

Suita, N. [1] On a continuity lemma of extremal length and its applications to conformal mapping. Koda Math Sem. Rep. 1967;19: 129～137.

Tamura Jirô [1] On a Theorem of Tsuji. Japan J Math. 1959;29: 138～140.

Tsuji, M. [1] Potential Theory in Modern Function Theory. Taruzen Tokyo, 1959.

张鸣镛(Zhang, Mingyong)

[1] Riemann Surfaces. Contemporary Mathematics, 1985;48: 151～155.

[2] 现代分析基础, 1987, 厦门大学出版社.

Ziemer, W. [1] Extremal length and conformal capacity. Trans. Amer. Math. Soc. 1967;126: 460～473.

# 名词索引

（按汉语拼音字母顺序排列）

## H



## J

## K



## L

## Z